



HAL
open science

Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

Mohamed Aziz Boukraa, Franck Delvare

► To cite this version:

Mohamed Aziz Boukraa, Franck Delvare. Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique. Journée du Pôle Stratégique Normand de Formation et de Recherche Sciences du Numérique, Oct 2019, Le havre, France. hal-04309280

HAL Id: hal-04309280

<https://normandie-univ.hal.science/hal-04309280>

Submitted on 27 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License



Normandie Université

Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique



Mohamed Boukraa, Franck Delvare

Laboratoire LMNO, Université de Caen, Boulevard Maréchal Juin, 14032 Caen, France

mohamed.boukraa@unicaen.fr



Motivations

L'opérateur biharmonique régit la flexion des plaques minces en petits déplacements. Sous certaines hypothèses, la déflexion verticale w de la plaque vérifie l'équation d'équilibre $\Delta^2 w = \frac{p}{D}$ à laquelle s'ajoute deux conditions aux limites en tout point de la frontière.

Dans certaines situations, il arrive que nous n'ayons pas accès à ces conditions aux limites et cela nous ramène à résoudre un problème inverse de type Cauchy pour le bilaplacien.

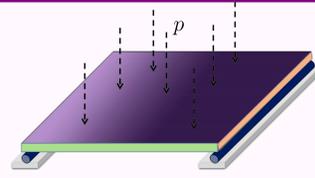


Figure 1: Plaque soumise à une charge

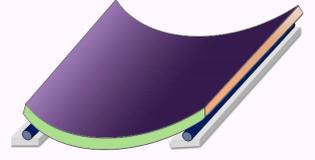


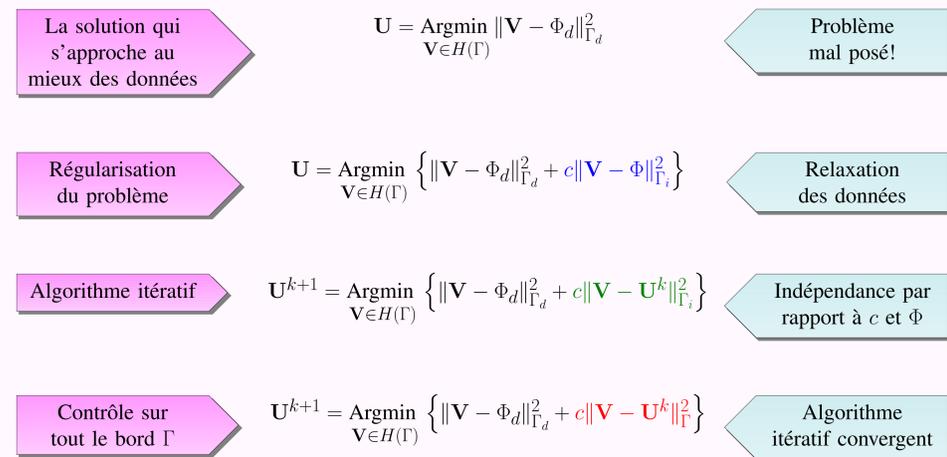
Figure 2: Plaque en flexion

Objectifs

Nous nous intéressons à la résolution du problème inverse de type Cauchy pour le bilaplacien. Nous souhaitons construire une méthode de régularisation telle que la solution ne soit pas dépendante d'un coefficient de régularisation et robuste vis-à-vis des perturbations sur les données.

La méthode de régularisation évanescence

Construction de la méthode



Résultats de convergence

Si Φ_d est un quadruplet de données compatibles (i.e. un élément de $H(\Gamma_d)$), associé à la solution compatible U_e du problème de Cauchy (1), alors la suite $(U^k)_k$ définie par l'algorithme itératif vérifie :

$$U^k \rightarrow \Phi_d \quad \text{dans } H(\Gamma_d) \quad \text{au sens fort}$$

$$U^k \rightarrow U_e \quad \text{dans } H(\Gamma) \quad \text{au sens faible}$$

Mise en œuvre numérique

Méthode des solutions fondamentales

- Une méthode numérique sans maillage.
- Approximation de la solution sous forme de combinaison linéaire des solutions fondamentales:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^M(a, b, Y; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M a_j \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j) + b_j \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}^j), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$$

- Y un vecteur contenant M points sources situés en dehors du domaine, $\mathbf{y}^j \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$,
- $a = (a_1, \dots, a_M)$ et $b = (b_1, \dots, b_M)$ deux vecteurs de constantes,
- \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 les solutions fondamentales de l'équation de Laplace et de l'équation biharmonique :

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega},$$

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{8\pi} r^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}.$$

avec $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

⇒ Pour tout $U_N = (u_1, \dots, u_N, u'_1, \dots, u'_N, v_1, \dots, v_N, v'_1, \dots, v'_N) \in H_N(\Gamma)$:

$$U_N = AX$$

- $X^t = (a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M)$,
- A est la matrice contenant les valeurs des solutions fondamentales en $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$.

• L'implémentation numérique de la méthode de régularisation évanescence avec la méthode des solutions fondamentales revient à résoudre le système suivant :

Pour $c > 0$ et $U^0 = 0$, on définit une suite X^k qui minimise J_c^k :

$$\begin{cases} J_c^{k+1}(X) = \|AX - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|AX - U^k\|_{\Gamma_i}^2 \\ X^{k+1} = \min_{X \in \mathbb{R}^{2M}} J_c^{k+1}(X) \end{cases} \quad (2)$$

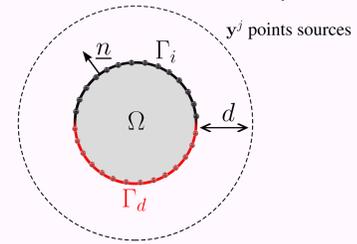
Nomenclature

w déflexion verticale de la plaque	k_{J_c} itération d'arrêt de l'algorithme itératif
p densité de charge transversale supportée par la plaque	n normale extérieure
D module de rigidité à la flexion	$H(\Gamma)$ espace caractéristique des solutions de l'opérateur
c coefficient de régularisation	δ niveau de bruit

Problème inverse de type Cauchy pour le bilaplacien

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 \\ \text{ou} \\ \begin{cases} \Delta u = v \\ \Delta v = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

$$\begin{cases} u = \varphi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v = \mu_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \forall x \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1)$$



$$\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_i \text{ et } \Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$$

Validation numérique

Pour un niveau de 3% de bruits sur les données, la solution du problème de Cauchy obtenue par la méthode de régularisation évanescence et sa solution analytique sont représentées sur la figure ci-dessous.

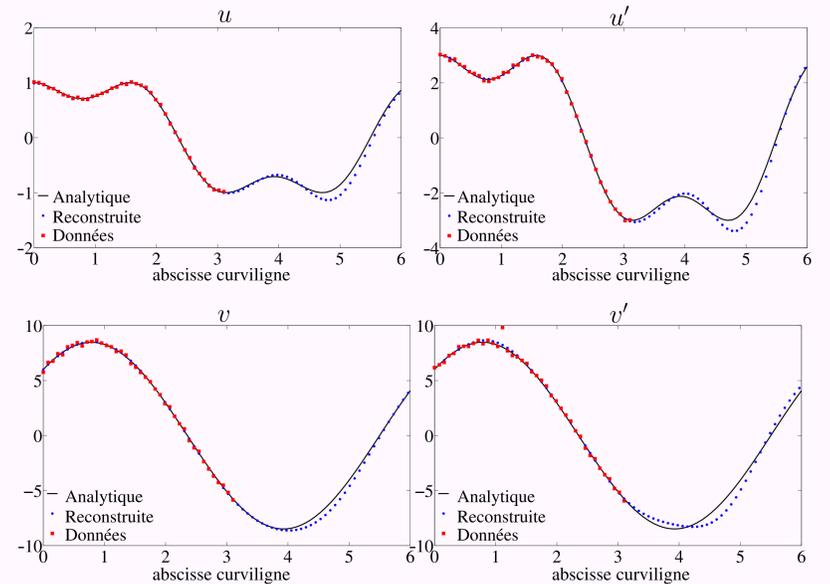


Figure 3: Reconstruction de la solution du bilaplacien et de ses dérivées partielles sur la frontière pour des données bruitées, $M = 10, d = 10, c = 10^{-2}, |\Gamma| = 80, \Gamma_d = \frac{1}{2}\Gamma$ et Ω le disque unité.

- ⇒ La solution reconstruite correspond à la solution analytique du problème.
- ⇒ Le bruit sur les données a été supprimé.

δ	c	k_{J_c}	$u_{err}(\%)$	$u'_{err}(\%)$	$v_{err}(\%)$	$v'_{err}(\%)$
1%	1	2000	2.63	2.29	1.35	2.33
	10^{-1}	262	2.66	2.31	1.35	2.33
	10^{-2}	47	2.65	2.23	1.35	2.33
3%	1	1686	8.18	7.05	4.04	6.95
	10^{-1}	255	8.26	7.11	4.06	6.98
	10^{-2}	41	8.25	7.10	4.05	6.97

Table 1: Évolution du pourcentage d'erreur commise sur la solution, évaluée à l'itération k_{J_c} pour différents niveaux de bruit δ et différentes valeurs de c à $N = 80, N_{\Gamma_d} = 40, M = 10$ et $d = 10$.

⇒ La solution reconstruite ne dépend pas du coefficient de régularisation c .

Conclusion

- La méthode de régularisation évanescence :
 - Capable de débruiter les données
 - Robuste (stable) vis à vis du bruit sur les données
 - La solution vérifie "l'équilibre"
 - N'est pas spécifique à un opérateur
- La méthode des solutions fondamentales permet de :
 - Discrétiser la frontière sans avoir besoin d'intégrations sur celle-ci
 - Avoir des résultats précis même avec peu de points de mesures

