



Espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$: morphismes étales

Dorian Berger

► To cite this version:

| Dorian Berger. Espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$: morphismes étales. 2021. hal-03466589v1

HAL Id: hal-03466589

<https://normandie-univ.hal.science/hal-03466589v1>

Preprint submitted on 6 Dec 2021 (v1), last revised 2 Feb 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ESPACES DE BERKOVICH SUR $\mathbb{Z}$: MORPHISMES ÉTALES

DORIAN BERGER

RÉSUMÉ. Nous étudions les morphismes non ramifiés, étales et lisses entre espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$. Nous obtenons des analogues des propriétés classiques des morphismes de schémas ainsi que des critères par analyfication. Ces résultats sont aussi valables sur les corps valués complets, les anneaux d'entiers de corps de nombres et les anneaux de valuation discrète. Ces différents cas sont traités de façon unifiée.

ABSTRACT (BERKOVICH SPACES OVER $\mathbb{Z}$: ÉTALE MORPHISMS). We develop properties of unramified, étale and smooth morphisms between Berkovich spaces over $\mathbb{Z}$. We prove that they satisfy properties analogous to those of morphisms of schemes and we provide analyfication criteria. Our results hold for any valued field, rings of integers of a number field and discrete valuation rings. Those cases are treated by a unified way.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
1. Espaces $\mathcal{A}$ -analytiques	4
2. Anneaux de base géométriques	7
3. Points rigides épais	12
4. Morphismes plats	19
5. Dimension algébrique	22
6. Morphismes non ramifiés	24
7. Morphismes étales	30
8. Morphismes lisses	37
Références	39

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14G22, 14G25, 14B25, 14F20.

Key words and phrases. Espaces de Berkovich, géométrie analytique globale, morphismes étales, morphismes lisses.

INTRODUCTION

Depuis le début du XX^e siècle, la théorie des nombres s'est enrichie de nombreux apports dus à l'analyse p -adique. Ces résultats ont motivé la construction d'une géométrie analytique sur les corps ultramétriques et, à partir des années 60, plusieurs théories sur ce sujet ont émergé. Parmi celles-ci, on peut noter la géométrie rigide de J. Tate ([Tat71]), les schémas formels de M. Raynaud ([Ray74]), les espaces adiques de R. Huber ([Hub93] et [Hub94]) ou encore les espaces analytiques de V. Berkovich ([Ber90]). Cette dernière, à laquelle on doit de nombreuses applications, notamment dans le programme de Langlands, en théorie de Hodge p -adique et en dynamique, est riche de bonnes propriétés topologiques : les espaces y sont localement compacts, localement connexes par arc et localement contractiles. Un autre intérêt de la théorie de Berkovich est qu'elle permet la construction d'espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque. En particulier, on peut construire des espaces analytiques sur les anneaux $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}$, tous deux munis de la valeur absolue usuelle. Dans le premier cas, on retrouve exactement les espaces analytiques complexes tandis que, dans le second cas, on obtient des espaces fibrés en espaces analytiques complexes et p -adiques. Bien que ces exemples soient donnés dans le premier chapitre de [Ber90], les espaces analytiques sur $\mathbb{Z}$ ne sont pas plus étudiés dans cet ouvrage. La première description approfondie d'un tel espace est celle, due à J. Poineau, présentée dans [Poi10] et qui traite le cas de la droite affine analytique.

Dans cet article, on se propose d'étudier les morphismes étales entre espaces analytiques sur $\mathbb{Z}$ ou sur un autre anneau d'entiers de corps de nombres. Un tel morphisme induit un isomorphisme local entre les fibres complexes et un morphisme étale au sens de [Ber93] entre les fibres p -adiques. On traite ces deux cas de façon unifiée. Les méthodes utilisées permettent d'obtenir les résultats sur une classe d'anneaux plus générale, comprenant les corps valués complets et les anneaux de valuation discrète.

Dans la première section, on rappelle la construction des espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque. Cette définition suit celle due à V. Berkovich et issue de [Ber90]. Ensuite, on définit la notion de morphisme d'espaces analytiques et on présente quelques résultats provenant de [Poi13] et [LP20]. Dans la deuxième section, on donne la définition d'une classe d'anneaux de Banach contenant $\mathbb{Z}$ (définition 2.5) à laquelle on se restreindra tout au long de cet article. Pour le reste de cette introduction, $\mathcal{A}$ désignera un tel anneau. Des propriétés fondamentales principalement issues de [LP20] sont aussi présentées dans la section 2. L'étude à laquelle sont consacrées les sections 3 et 4 permet d'obtenir d'importants résultats sur les fibres des espaces analytiques. La principale difficulté provient du fait que la restriction

aux fibres d'un morphisme d'espaces analytiques est plus subtile que son analogue schématique : si $f : X \rightarrow S$ est un tel morphisme et $s \in S$, la fibre $X_s = f^{-1}(s)$ est naturellement munie d'une structure d'espace analytique, non pas sur le corps résiduel de $\mathcal{O}_s$, qu'on notera $\kappa(s)$, mais sur son complété $\mathcal{H}(s) = \widehat{\kappa(s)}$. Parmi les résultats obtenus, on notera notamment les suivants, où $\mathfrak{m}_x$ (resp. $\mathfrak{m}_{X_s, x}$) désigne l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ (resp. $\mathcal{O}_{X_s, x}$) :

Proposition (Proposition 3.8). *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$ tels que $\kappa(x)$ soit une extension finie de $\kappa(s)$. On a alors :*

$$\mathfrak{m}_{X_s, x} = \sqrt{\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X_s, x}}.$$

Théorème (Théorème 4.4). *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors le morphisme*

$$\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}$$

est plat.

Ces résultats sont utiles pour démontrer certains critères par fibres comme la proposition suivante :

Proposition (Corollaire 4.5, Proposition 7.3). *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces S -analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x . On suppose que $X \rightarrow S$ est plat en x . Si $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ est plat (resp. étale) en x alors $f : X \rightarrow Y$ est plat (resp. étale) en x .*

Plus précisément, la section 3 est consacrée à l'étude d'une propriété ponctuelle de morphisme satisfaite par les morphismes non ramifiés. Si cette propriété est vérifiée par un morphisme f en un point x , on dira que x est *rigide épais* au-dessus de $f(x)$. Cette notion est fondamentale dans la démonstration des différents critères par fibres, avec notamment le fait suivant : si x est rigide épais au-dessus de $f(x)$, alors $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_{f(x)} \mathcal{O}_x$ est un corps si et seulement si $\mathcal{O}_{X_{f(x)}, x}$ en est un (corollaire 3.12). Dans la section 4, on applique certains résultats de la section 3 à l'étude des morphismes plats. On en déduit notamment le critère de platitude par fibres énoncé ci-dessus ainsi que la platitude des morphismes de projection $\mathbb{A}_S^n \rightarrow S$ (corollaire 4.9) et des morphismes lisses (lemme 8.7). Dans la section 5, on établit des résultats sur la dimension de Krull des anneaux locaux de certains points particuliers dont on se sert ensuite pour montrer que les morphismes non ramifiés sont quasi-finis (corollaire 6.5).

Les résultats sur les morphismes non ramifiés commencent à proprement parler dans la section 6. On y propose une étude systématique de ces morphismes apparus comme outils dans [LS19]. On démontre notamment le critère suivant : un morphisme est non ramifié en un point

x si et seulement si sa diagonale est un isomorphisme local en x (proposition 6.12). Les morphismes étales sont étudiés dans la section 7. Outre le critère par fibres déjà énoncé, on y démontre dans le cadre des espaces analytiques certaines propriétés classiques des morphismes de schémas étales comme le caractère ouvert (corollaire 7.9) ou l'invariance topologique (proposition 7.11). Dans la huitième et dernière section, on introduit les morphismes lisses et on montre quelques résultats dont la caractérisation suivante : un morphisme d'espaces analytiques est étale en un point si et seulement s'il est lisse et non ramifié en ce point (corollaire 8.8).

On dispose d'un foncteur d'analytification des $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\text{an}}$ et on note $\rho : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme canonique associé. On montre que, quitte à ajouter certaines hypothèses sur l'anneau de base (voir définition 2.22), ce foncteur conserve différentes propriétés de morphisme étudiées dans cet article, répondant ainsi à une conjecture énoncée dans [LS19, (2.2.9)] :

Théorème (Corollaire 6.8, Proposition 7.10). *Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie et $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Alors f est non ramifié (resp. étale) en $\rho(x)$ si et seulement si $f^{\text{an}} : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{S}^{\text{an}}$ est non ramifié (resp. étale) en x .*

Il y a cependant quelques propriétés qui diffèrent entre les morphismes étales de schémas et les morphismes étales d'espaces analytiques. L'exemple le plus flagrant est certainement la présentation locale de tels morphismes :

Proposition (Corollaire 7.7). *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors f est étale en x si et seulement si on dispose d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ dont l'image dans $\kappa(s)[T]$ est irréductible et séparable et tel que f induise un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_s[T] / (P(T)) \cong \mathcal{O}_x.$$

L'analogue schématique de ce résultat nécessite une opération de localisation supplémentaire dont on peut se passer ici grâce aux bonnes propriétés topologiques des espaces en jeu. Ce phénomène est illustré dans la remarque 7.5.

Remerciements. Nous remercions Jérôme Poineau pour les nombreuses discussions à l'origine de cet article.

1. ESPACES $\mathcal{A}$ -ANALYTIQUES

L'objectif de cette section est de rappeler la définition d'espace analytique sur un anneau de Banach quelconque présentée dans le premier chapitre de [Ber90]. Le lecteur trouvera une référence plus précise en [LP20], notamment dans les chapitres 1 et 2.

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ désigne un anneau de Banach, c'est-à-dire un anneau normé et complet pour cette norme.

Définition 1.1. Une application $|\cdot| : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ bornée sur $\mathcal{A}$ si, pour tout $P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ et pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :

- $|0| = 0$,
- $|1| = 1$,
- $|P + Q| \leq |P| + |Q|$,
- $|PQ| = |P||Q|$,
- $|a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$.

Définition 1.2. L'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ bornées sur $\mathcal{A}$ est appelé espace affine analytique de dimension n sur $\mathcal{A}$ et est noté $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$. Dans le cas $n = 0$, cet ensemble est noté $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

On munit $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie la plus grossière telle que les applications d'évaluations $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $|\cdot| \mapsto |P|$ soient continues pour $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$.

Proposition 1.3 ([Poi13, Corollaire 6.8]). Le morphisme naturel $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est ouvert.

On pensera aux éléments de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ comme aux points d'un espace et, si $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$, on notera $|\cdot|_x : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ la semi-norme associée. On cherche à présent à construire un faisceau structural sur $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$.

Définition 1.4. Soit $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$. L'idéal $\ker(|\cdot|_x) \subset \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ est premier et $|\cdot|_x$ induit une valeur absolue sur

$$\text{Frac} \left(\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] / \ker(|\cdot|_x) \right).$$

Le complété de ce corps est appelé corps résiduel complété en x et noté $\mathcal{H}(x)$.

On note $\text{ev}_x : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n \rightarrow \mathcal{H}(x)$ l'application $f \mapsto |f|_x$. Si $f \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, $\text{ev}_x(f)$ est noté $f(x)$.

Définition 1.5. Soit $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ une partie compacte. Le localisé de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ en $\{f \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \mid \forall x \in V, f(x) \neq 0\}$ est appelé anneau des fractions rationnelles sans pôles sur V et noté $\mathcal{K}(V)$. L'application $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P \mapsto \max_{x \in V} (|P|_x)$ s'étend en une semi-norme sur $\mathcal{K}(V)$, appelée semi-norme uniforme sur V et notée $\|\cdot\|_V$.

Définition 1.6. Soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ un ouvert. L'ensemble des applications $f : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x)$ vérifiant, pour tout $x \in U$:

- $f(x) \in \mathcal{H}(x)$
- il existe un voisinage compact V de x dans U et une suite d'éléments de $\mathcal{K}(V)$ qui converge vers $f|_V$ pour la semi-norme uniforme sur V .

est noté $\mathcal{O}(U)$.

Pour tout $x \in U$, l'application d'évaluation ev_x s'étend à $\mathcal{O}(U)$ et, si $f \in \mathcal{O}(U)$, $\text{ev}_x(f)$ est encore noté $f(x)$.

Le foncteur contravariant $V \mapsto \mathcal{O}(V)$ est un faisceau munissant $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ d'une structure d'espace localement annelé. Si x est un point de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$, le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$ est appelé *corps résiduel en x* et noté $\kappa(x)$. On définit à présent les notions d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et de morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques.

Définition 1.7. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ et $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ des ouverts. Un morphisme d'espaces localement annelés $(f, f^\#) : (U, \mathcal{O}_U) \rightarrow (V, \mathcal{O}_V)$ est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques si, pour tout $x \in U$, le morphisme $f_x^\#$ induit un plongement isométrique de corps $\kappa(f(x)) \rightarrow \kappa(x)$.

Définition 1.8. Soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ un ouvert. Un fermé analytique de U est un espace localement annelé de la forme $(\text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}), \iota^{-1}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}))$ où $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ est un faisceau cohérent d'idéaux et $\iota : \text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}) \hookrightarrow U$ est l'inclusion canonique. Dans ce cas, on dit que ι est une immersion fermée.

Un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ est appelé *modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique*. Un morphisme entre modèles locaux d'espace $\mathcal{A}$ -analytique est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques s'il provient localement d'un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques entre ouverts d'espaces affines.

Remarque 1.9. Une immersion fermée est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques.

Définition 1.10. Un espace $\mathcal{A}$ -analytique est un espace localement annelé localement isomorphe à un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique. Les notions de morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et d'immersion fermée se prolongent naturellement aux morphismes entre espaces $\mathcal{A}$ -analytiques.

Si x est un point d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique, le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ sera encore noté $\kappa(x)$.

Définition 1.11. Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $X \rightarrow S$ est une immersion ouverte s'il induit un isomorphisme entre X et un ouvert de S .

Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques est une immersion s'il s'écrit comme la composée à gauche d'une immersion ouverte par une immersion fermée.

Proposition 1.12 ([LP20, Proposition 2.3.7]). Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\iota : Y \rightarrow S$ une immersion fermée induisant un isomorphisme $Y \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_S/\mathcal{I})$ où $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ est un faisceau cohérent d'idéaux. Alors f se factorise par ι si et seulement si $f^*\mathcal{I} = 0$. Dans ce cas, cette factorisation est unique.

Proposition 1.13 ([Poi13, Corollaire 5.3]). *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$. Alors le corps $\kappa(x)$ est hensélien.*

Corollaire 1.14. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$
- ii) $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$

Démonstration. D'après la proposition 1.13, $\kappa(s)$ est hensélien. Or, $\mathcal{H}(x)$ est le complété de $\kappa(x)$ et $\mathcal{H}(s)$ est celui de $\kappa(s)$. On obtient donc le résultat d'après [Ber93, Proposition 2.4.1]. $\square$

2. ANNEAUX DE BASE GÉOMÉTRIQUES

On rappelle la définition, issue de [LP20], d'une classe d'anneaux contenant $\mathbb{Z}$ et possédant de bonnes propriétés permettant d'approfondir l'étude des espaces analytiques sur ceux-ci. Parmi les résultats principaux, on notera la cohérence du faisceau structural (théorème 2.7), l'existence de produits fibrés finis et d'un foncteur d'analytification des schémas (théorème 2.12) ainsi que des analogues du théorème de l'application finie (théorème 2.19) et du Nullstellensatz de Rückert (théorème 2.21).

Dans cette section, $\mathcal{A}$ désigne un anneau de Banach.

Définition 2.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ une partie compacte. On note $\mathcal{B}(V)$ le séparé complété de $\mathcal{K}(V)$ pour la semi-norme uniforme sur V . Le morphisme naturel $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(V)$ induit un morphisme d'espaces localement annelés $f_V : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$. On dit que V est spectralement convexe si f_V induit un homéomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow V$ ainsi qu'un isomorphisme d'espaces localement annelés $f_V^{-1}(\overset{\circ}{V}) \rightarrow \overset{\circ}{V}$.*

On notera qu'il est démontré dans [Poi10] que tout point de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ admet un système fondamental de voisinages compacts et spectralement convexes.

Définition 2.2. *Soient X un espace topologique et $x \in X$. Un système fondamental $\mathcal{V}_x$ de voisinages de x est fin si'il contient un système fondamental de voisinages de chacun de ses éléments.*

Définition 2.3. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ et $\mathcal{V}_x$ un système fondamental fin de voisinages compacts spectralement convexes de x . On dit que $\mathcal{O}_x$ est fortement régulier de dimension n relativement à $\mathcal{V}_x$ si $\mathcal{O}_x$ est noethérien de dimension n et si'il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}_x$ vérifiant :*

- pour tous $V \in \mathcal{V}_x$ et $i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket$, f_i appartient à l'image du morphisme naturel $\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{O}_x$,
- pour tout voisinage compact U de x , on dispose d'une famille de réels strictement positifs $(C_V)_{V \in \mathcal{V}_x}$ telle que, pour tout $f \in \mathfrak{m}_x$

appartenant à l'image du morphisme naturel $\mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{O}_x$ et tout élément $V \in \mathcal{V}_x$ contenu dans $\hat{U}$, on dispose de $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}(V)$ vérifiant, pour tout $i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket$, $\|a_i\|_V \leq C_V \|f\|_U$ et $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$.

Définition 2.4. Soient X un espace localement annelé et $x \in X$. Alors X satisfait le principe du prolongement analytique en x si, pour tout $f \in \mathcal{O}_x$ non nul, on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que, pour tout $t \in U$, l'image de f dans $\mathcal{O}_t$ est non nulle. On dit que X satisfait le principe du prolongement analytique si c'est le cas en tout point.

Définition 2.5. Un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ est appelé un anneau de base géométrique si $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfait le principe du prolongement analytique et si tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ admet un système fondamental $\mathcal{V}_x$ de voisinages d'intérieur connexe et vérifiant :

- $\mathcal{O}_x$ est fortement régulier de dimension ≤ 1 relativement à $\mathcal{V}_x$,
- Si $\mathcal{H}(x)$ est trivialement valué et de caractéristique positive alors, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_x$, il existe un fermé fini $\Gamma \subset V$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{B}(V)$, $\|f\|_{\Gamma} = \|f\|_V$ et tout point d'un tel voisinage V correspond à une semi-norme ultramétrique.

Exemple 2.6. Les exemples suivants sont des anneaux de base géométriques :

- les corps valués complets,
- les anneaux d'entiers de corps de nombres $\mathcal{A}$ munis de la valeur absolue $\max_{\sigma}(|\sigma(\cdot)|_{\infty})$ où σ parcourt l'ensemble des plongements complexes de $\text{Frac}(\mathcal{A})$ et $|\cdot|_{\infty}$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$,
- les corps hybrides au sens de [LP20, Exemple 1.1.15],
- les anneaux de valuation discrète,
- les anneaux de Dedekind trivialement valués.

Dans la suite de cet article, $\mathcal{A}$ désignera un anneau de base géométrique.

Théorème 2.7 ([Poi13, Théorème 11.9]). Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Alors le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est cohérent.

Lemme 2.8. Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $\iota : X \hookrightarrow Y$ une immersion d'espaces S -analytiques, $x \in X$ et $s \in S$ l'image de x . Alors $\iota : X \hookrightarrow Y$ est un isomorphisme local en x si et seulement si le morphisme induit $\iota_s : X_s \hookrightarrow Y_s$ est un isomorphisme local en x .

Démonstration. Le sens direct étant immédiat, on démontre la réciproque. Soit $y = \iota(x)$. Comme $\iota : X \hookrightarrow Y$ est une immersion, on dispose d'un ouvert $U \subset Y$ et d'un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ vérifiant $X \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I})$. De plus, ι induit une immersion $\iota_s : X_s \hookrightarrow Y_s$ et donc l'existence d'un ouvert $V \subset Y_s$ et d'un faisceau cohérent d'idéaux

$\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_V$ vérifiant $X_s \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_V/\mathcal{J})$. Le faisceau $\mathcal{J}$ étant engendré par les restrictions à Y_s des générateurs de $\mathcal{I}$, on a :

$$\mathcal{O}_{Y_s,y} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{I}_y \cong \mathcal{J}_y.$$

Si ι_s est un isomorphisme local en x , on a $\mathcal{J}_y = 0$. En utilisant $\mathcal{I}_y/\mathfrak{m}_y \mathcal{I}_y \cong \kappa(y) \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{I}_y$ et $\mathcal{O}_{Y_s,y}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{Y_s,y} \cong \kappa(y) \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_{Y_s,y}$, on obtient :

$$\mathcal{O}_{Y_s,y} / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{Y_s,y} \otimes_{\kappa(y)} \mathcal{I}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{I}_y = 0.$$

Par fidèle platitude de $\kappa(y) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_s,y}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{Y_s,y}$, on déduit $\mathcal{I}_y/\mathfrak{m}_y \mathcal{I}_y = 0$. On obtient $\mathcal{I}_y \subset \mathfrak{m}_y \mathcal{I}_y \subset \mathcal{I}_y$ donc $\mathcal{I}_y = \mathfrak{m}_y \mathcal{I}_y$ et, d'après le lemme de Nakayama, $\mathcal{I}_y = 0$. On en conclut que ι est un isomorphisme local en x . $\square$

Lemme 2.9. *Soient $\iota : X \hookrightarrow Y$ une immersion d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $x \in X$. Alors ι est plat en x si et seulement si c'est un isomorphisme local en x .*

Démonstration. Si ι est une immersion alors on dispose d'un idéal $I \subset \mathcal{O}_y$ vérifiant $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y/I$. On suppose que $\iota_x^\# : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est plat. Comme $\mathcal{O}_y$ est noethérien, on déduit de [Stacks, Tag 05KK] que I est engendré par un idempotent $e \in \mathcal{O}_y$. Or, $e \neq 1$ car $\mathcal{O}_y/I \neq 0$. L'anneau $\mathcal{O}_y$ étant local et donc connexe, on obtient $e = 0$. Cela signifie que $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y$ et ι est un isomorphisme local en x . La réciproque est immédiate. $\square$

Lemme 2.10. *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Si $f_x^\# : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est surjectif alors il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $f|_U$ soit une immersion.*

Démonstration. L'idéal $I = \ker(f_x^\#) \subset \mathcal{O}_y$ est de type fini car $\mathcal{O}_y$ est noethérien et on choisit donc une famille génératrice finie d'éléments de I . Soit $V \subset Y$ un voisinage ouvert de y sur lequel ces générateurs sont définis et $U = f^{-1}(V)$. Ils engendrent alors un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$ vérifiant $\mathcal{I}_y = I$ et $(f^*(\mathcal{I}))_x = 0$ et qui est cohérent d'après le théorème 2.7. Quitte à rétrécir U , on peut supposer $f^*(\mathcal{I}) = 0$. Alors, d'après la proposition 1.12, $f|_U : U \rightarrow V$ se factorise par l'immersion fermée $\iota : \text{Supp}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) \hookrightarrow V$. On note $g : U \rightarrow \text{Supp}(\mathcal{O}_V/\mathcal{I})$ le morphisme obtenu. Comme $f_x^\#$ est surjectif, le morphisme $g_x^\# : \mathcal{O}_{g(x)} \cong \mathcal{O}_y/I \rightarrow \mathcal{O}_x$ est un isomorphisme, g est un isomorphisme local en x et $f|_U : U \rightarrow V$ est une immersion fermée. $\square$

Proposition 2.11 ([LP20, Proposition 4.1.1]). *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $n \in \mathbb{N}$. Le foncteur $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ est représenté par $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$. De plus, en notant $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$, une transformation naturelle*

$$\text{Hom}(X, \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$$

est donnée par $f \mapsto (f^\#(T_1), \dots, f^\#(T_n))$.

Théorème 2.12 ([LP20, Théorèmes 4.1.13 et 4.3.8]). *La catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques admet des produits fibrés finis ainsi qu'un foncteur d'analytification $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\text{an}}$ depuis la catégorie des $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie.*

Notation 2.13. *Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{A}$ -schéma localement de présentation finie, on note $\rho : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ le morphisme canonique.*

Lemme 2.14 (Preuve de [LP20, Lemme 6.5.2]). *Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie et $s \in \mathcal{S}^{\text{an}}$. On a alors un isomorphisme canonique :*

$$\left(\mathcal{X}_{\rho(s)} \otimes_{\kappa(\rho(s))} \mathcal{H}(s) \right)^{\text{an}} \cong (\mathcal{X}^{\text{an}})_s.$$

Lemme 2.15. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, X et Y des espaces au-dessus de S , $s \in S$ et $x \in X$ un point au-dessus de s tel que $\mathcal{H}(x)$ soit une extension séparable de $\mathcal{H}(s)$ de degré d . On note p_X et p_Y les projections $X \times_S Y \rightarrow X$ et $X \times_S Y \rightarrow Y$. Alors, pour tout point $y \in Y$, l'ensemble $p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\})$ est fini et de cardinal inférieur à d .*

Démonstration. Soit $y \in Y$. On commence par remarquer que si y ne s'envoie pas sur s alors $p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. On peut donc supposer que $y \in Y_s$ et que les produits fibrés se font sur $\mathcal{H}(s)$. On pose $\{x\} \times_s \{y\} = p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\})$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, U (respectivement V) un voisinage ouvert de x (respectivement y) et $i : U \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^n$ et $j : V \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^m$ des immersions. Comme i et j induisent une immersion $X \times_{\mathcal{H}(s)} Y \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^{n+m}$ puis une injection $\{x\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{y\} \hookrightarrow \{i(x)\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{j(y)\}$, on se ramène au cas $X = \mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^n$ et $Y = \mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^m$.

On sait que $\{x\}$ (respectivement $\{y\}$) est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^n$ (respectivement $\mathbb{A}_{\mathcal{H}(s)}^m$). Donc, d'après la proposition [LP20, Proposition 4.4.9], on a $\mathcal{B}(\{x\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{y\}) \cong \mathcal{B}(\{x\}) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(s)}^{\text{sp}} \mathcal{B}(\{y\}) \cong \mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_{\mathcal{H}(s)}^{\text{sp}} \mathcal{H}(y)$ qui s'écrit $\prod_{i=1}^r K_i$ où les K_i sont des extensions de $\mathcal{H}(s)$ et $r \leq d$ d'après [Wei95, Proposition III.2.2]. On en déduit que $\{x\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{y\}$ est homéomorphe à $\mathcal{M}(\prod_{i=1}^r K_i)$ qui est composé de r points. $\square$

Proposition 2.16 ([LP20, Proposition 4.5.7]). *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytiques et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques au-dessus de S . Alors le graphe $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_S Y$ est une immersion.*

Définition 2.17. *Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques est fini s'il est fini au sens topologique, c'est-à-dire s'il est fermé à fibres finies.*

Proposition 2.18 ([LP20, Proposition 5.1.8]). *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules et $s \in S$. Alors le morphisme naturel*

$$(f_*\mathcal{F})_s \longrightarrow \prod_{x \in X_s} \mathcal{F}_x$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_s$ -modules.

Théorème 2.19 ([LP20, Théorème 5.2.6]). *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur S .*

Corollaire 2.20. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Si f est fini en x alors $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_s$ -module de présentation finie.*

Démonstration. On applique le théorème 2.19 au faisceau structural $\mathcal{O}_X$ et on en déduit que $\mathcal{O}_x$ est de type fini sur $\mathcal{O}_s$. De plus, $\mathcal{O}_s$ étant noethérien, on en déduit que $\mathcal{O}_x$ est de présentation finie. $\square$

Théorème 2.21 (Nullstellensatz de Rückert, [LP20, Théorème 5.5.5]). *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $f \in \mathcal{O}(X)$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \text{Supp}(\mathcal{F})$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \mathcal{F}_x = 0$.*

Même si la plupart des résultats de cet article traitent des espaces analytiques sur un anneau de base géométrique quelconque, certaines propriétés d'analytification ne sont établies que sur une classe plus restreinte d'anneaux que l'on définit maintenant.

Définition 2.22. *Un anneau de base géométrique $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique si :*

- $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind,
- le morphisme $\rho : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ est surjectif,
- si $\xi \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ est tel que $\mathcal{O}_\xi$ soit un corps alors, pour tout $x \in \rho^{-1}(\xi)$, $\mathcal{O}_x$ est un corps,
- si $\xi \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ est tel que $\mathcal{O}_\xi$ soit un anneau de valuation discrète alors, pour tout $x \in \rho^{-1}(\xi)$, $\mathcal{O}_x$ est un anneau de valuation discrète et $\rho_x^\sharp : \mathcal{O}_\xi \rightarrow \mathcal{O}_x$ est le morphisme de complétion.

Exemple 2.23. *Les exemples 2.6 sont tous des anneaux de Dedekind analytiques.*

Théorème 2.24 ([LP20, Théorème 6.6.4]). *On suppose que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$ -schéma localement de présentation finie. Alors le morphisme d'analytification $\rho : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ est plat.*

Corollaire 2.25. *On suppose que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie et $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Si f^{an} est plat en x alors f est plat en $\rho(x)$.*

Démonstration. On note $\xi = \rho(x)$, $s = f^{\text{an}}(x)$ et $\sigma = \rho(s) = f(\xi)$. D'après le théorème 2.24, les morphismes $\mathcal{O}_\xi \rightarrow \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_\sigma \rightarrow \mathcal{O}_s$ sont

plats. En particulier, $\mathcal{O}_x$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_s$ et $\mathcal{O}_\xi$ et on conclut par [Stacks, Tag 039V]. $\square$

3. POINTS RIGIDES ÉPAIS

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique.

Dans cette section, on définit les points rigides épais relativement à un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et on démontre certaines de leurs propriétés, notamment la relation entre $\mathfrak{m}_x$ et $\mathfrak{m}_{X_s, x}$ énoncée en introduction. Cette étude est motivée par le fait suivant : si un morphisme f est non ramifié en un point x au sens de la définition 6.1 alors x est rigide épais relativement à f .

Définition 3.1. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Un point x de X sera appelé rigide épais relativement à f si $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(f(x))$.

Remarque 3.2. On écrira simplement « x est rigide épais » sans préciser le morphisme lorsque le contexte le permettra.

Définition 3.3. Si S est un espace $\mathcal{A}$ -analytique, on appellera espace S -analytique tout espace $\mathcal{A}$ -analytique muni d'un morphisme vers S , appelé projection sur S . Si X et Y sont deux espaces S -analytiques, un morphisme d'espaces S -analytiques $X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques qui commute aux projections vers S .

Si n est un entier, on appellera espace affine S -analytique de dimension n et on notera $\mathbb{A}_S^n$ le produit fibré $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n \times_{\mathcal{A}} S$ et $\pi_S : \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$ la projection sur S . On appellera alors coordonnées de $\mathbb{A}_S^n$ les relevées des coordonnées de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ par la projection $\mathbb{A}_S^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$. Si U est un sous-espace $\mathcal{A}$ -analytique de $\mathbb{A}_S^n$ muni de la projection vers S induite par π_S , on dira que c'est un modèle local d'espace S -analytique.

Notation 3.4. Si $\mathcal{S}$ est un schéma et $n \in \mathbb{N}$, on notera encore $\mathbb{A}_{\mathcal{S}}^n$ l'espace affine schématique de dimension n au-dessus de $\mathcal{S}$. Afin d'alléger l'écriture, $\mathbb{A}_{\text{Spec}(\mathcal{A})}^n$ sera noté $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{sch}}$.

Lemme 3.5. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors X admet un recouvrement par des modèles locaux d'espace S -analytique et l'inclusion d'un tel modèle local dans X est un morphisme d'espaces S -analytiques.

Démonstration. Soient $U \subset X$ un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique, $n \in \mathbb{N}$ et $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ une immersion. D'après la proposition 2.16, le graphe $\Gamma_f : U \hookrightarrow U \times_{\mathcal{A}} S$ de $f|_U$ est une immersion. En la composant avec $\iota \times \text{Id}_S : U \times_{\mathcal{A}} S \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{A}_S^n \\ & \searrow f & \swarrow \pi_S \\ & S & \end{array}$$

où Γ désigne $(\iota \times \text{Id}_S) \circ \Gamma_f : U \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n$. Comme Γ est une immersion, on en déduit que U est un modèle local d'espace S -analytique. On peut effectuer ce raisonnement pour un recouvrement de X par des modèles locaux d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et on en déduit le résultat. $\square$

Lemme 3.6. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ et $0_s \in \mathbb{A}_S^n$ le point 0 de la fibre au-dessus de s . On note $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}_S^n$. On a alors un monomorphisme naturel*

$$\mathcal{O}_s[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathcal{O}_{0_s}$$

induisant un isomorphisme entre les complétés $(T_1, \dots, T_n)$ -adiques.

En particulier, on a $\mathcal{O}_{0_s} \subset \mathcal{O}_s[[T_1, \dots, T_n]]$.

Démonstration. Une récurrence simple permet de se ramener au cas $n = 1$. La propriété étant locale, on peut supposer que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et on dispose alors de $m \in \mathbb{N}$ et d'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}$ vérifiant $S \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}/\mathcal{I})$. On a alors $\mathbb{A}_S^1 \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+1}}/(\pi_m)^*\mathcal{I})$ où $\pi_m : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+1} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ désigne la projection sur les m premières coordonnées. On note s' l'image de s dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$, $0_{s'}$ le point 0 de la fibre de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+1}$ au-dessus de s' et T la dernière coordonnée de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+1}$.

On cherche à présent à décrire $\mathcal{O}_{0_{s'}}$. On pose $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ un voisinage compact spectralement convexe de s' et on se restreint à $\mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$. Si $W \subset \mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ est une partie compacte et $t > 0$, on note $\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle$ l'algèbre des séries $\sum a_n T^n$ où $(a_n) \in \mathcal{B}(W)^{\mathbb{N}}$ est telle que $\sum \|a_n\|_W t^n$ converge. D'après [Poi13, Corollaire 2.6], le morphisme naturel

$$\varinjlim_{W \ni s', t > 0} \mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle \longrightarrow \mathcal{O}_{0_{s'}},$$

où W parcourt les voisinages compacts de s' dans $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$, est un isomorphisme. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{B}(W)\langle |T| \leq t \rangle / (T^n) \cong \mathcal{B}(W)[T] / (T^n).$$

Or, $\mathcal{O}_{s'}$ étant noethérien, $\mathcal{I}_{s'} \subset \mathcal{O}_{s'}$ est de type fini et l'exactitude à droite de $\varinjlim$ et de la complétion T -adique $A \mapsto \hat{A}$ des anneaux

noethériens permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{O}_{0_s}} &\cong \widehat{\mathcal{O}_{0_{s'}} / \mathcal{I}_{s'}} \cong \widehat{\mathcal{O}_{0_{s'}}} / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \left(\varprojlim_n \left(\varinjlim_{W \ni s', t > 0} \mathcal{B}(W) \langle |T| \leq t \rangle \right) / T^n \right) / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \left(\varprojlim_n \varinjlim_{W \ni s', t > 0} \left(\mathcal{B}(W) \langle |T| \leq t \rangle / T^n \right) \right) / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \left(\varprojlim_n \varinjlim_{W \ni s', t > 0} \left(\mathcal{B}(W)[T] / T^n \right) \right) / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \left(\varprojlim_n \left(\varinjlim_{W \ni s', t > 0} \mathcal{B}(W)[T] \right) / T^n \right) / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \left(\varprojlim_n \mathcal{O}_{s'}[T] / T^n \right) / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \widehat{\mathcal{O}_{s'}[T]} / \mathcal{I}_{s'} \cong \widehat{\mathcal{O}_{s'}[T]} / \mathcal{I}_{s'} \\
&\cong \widehat{\mathcal{O}_s[T]} \cong \mathcal{O}_s[[T]].
\end{aligned}$$

L'anneau $\mathcal{O}_s[[T_1, \dots, T_n]]$ étant le complété $(T_1, \dots, T_n)$ -adique de l'anneau noethérien $\mathcal{O}_{0_s}$, on en conclut bien l'inclusion $\mathcal{O}_{0_s} \subset \mathcal{O}_s[[T_1, \dots, T_n]]$. $\square$

Lemme 3.7. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{A}_S^n$ un point rigide épais relativement à π_S et $s = \pi_S(x)$. Notons 0_s le point 0 de la fibre au-dessus de s . On dispose alors de polynômes $P_1 \in \mathcal{O}_{0_s}[S_1]$, $P_2 \in \mathcal{O}_{0_s}[S_1, S_2]$, $\dots$, $P_n \in \mathcal{O}_{0_s}[S_1, \dots, S_n]$ tels que, en notant $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}_S^n$, on ait un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_s}[S_1, \dots, S_n] / (P_1(S_1) - T_1, \dots, P_n(S_1, \dots, S_n) - T_n).$$

Cet isomorphisme reste vérifié dans la fibre au-dessus de s .

Démonstration. On montre la propriété par récurrence sur n .

Si $n = 0$ alors $\mathbb{A}_S^n = S$, $\pi_S = \text{Id}_S$ et donc $x = 0_s$. On a donc bien $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_s}$.

On suppose maintenant la propriété vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et on la montre pour $n + 1$. Soient $x \in \mathbb{A}_S^{n+1}$ et $x_1 \in \mathbb{A}_S^1$ sa projection sur la première coordonnée T_1 . Soient $m \in \mathbb{N}$, $U \subset S$ un voisinage ouvert de s , $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ une immersion et $\eta = \iota \times_{\mathcal{A}} \text{Id}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^1} : \mathbb{A}_U^1 \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+1}$ l'immersion induite sur $\mathbb{A}_U^1$ de coordonnée T_1 . On note $s' = \iota(s)$,

$x'_1 = \eta(x_1)$, $0_{s'} \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1}$ le point 0 de la fibre au-dessus de s' et $0_{x'_1} \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1}$ le point 0 de la fibre au-dessus de x'_1 . Alors x'_1 est rigide épais au-dessus de s' et on note $P_1 \in \kappa(s')[S_1]$ son polynôme minimal. On commence par montrer l'isomorphisme :

$$(1) \quad \mathcal{O}_{0_{x'_1}} \cong \mathcal{O}_{0_{s'}}[S_1] / (P_1(S_1) - T_1).$$

Soit $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ un voisinage compact spectralement convexe de s' tel que les coefficients de P_1 appartiennent à $\mathcal{B}(V)$. La propriété recherchée étant locale, on peut se restreindre à la démontrer sur $\mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^{n+1}$. D'après [Poi13, Corollaire 8.10], P_1 induit un morphisme $\varphi : \mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^{n+1}$ de sorte que $\varphi^{-1}(0_{s'}) = 0_{x'_1}$ et on a bien l'isomorphisme (1). On dispose à présent d'un voisinage ouvert $W \subset V$ de s' ainsi que d'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_W$ vérifiant $\mathcal{O}_s \cong \mathcal{O}_{s'} / \mathcal{I}_{s'}$. De plus, on a $\mathcal{O}_{0_{x_1}} \cong \mathcal{O}_{0_{x'_1}} / \mathcal{I}_{s'} \mathcal{O}_{0_{x'_1}}$ et $\mathcal{O}_{0_s} \cong \mathcal{O}_{0_{s'}} / \mathcal{I}_{s'} \mathcal{O}_{s'}$. On obtient donc par un passage au quotient de (1) :

$$\mathcal{O}_{0_{x_1}} \cong \mathcal{O}_{0_s}[S_1] / (P_1(S_1) - T_1).$$

L'hypothèse de récurrence appliquée au point $x \in \mathbb{A}_S^{n+1}$ au-dessus de $x_1 \in \mathbb{A}_S^1$ assure l'existence de polynômes $P_2 \in \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2]$, $P_3 \in \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2, S_3], \dots, P_{n+1} \in \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2, \dots, S_{n+1}]$ vérifiant :

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2, \dots, S_{n+1}] / (P_2(S_2) - T_2, \dots, P_{n+1}(S_2, \dots, S_{n+1}) - T_{n+1})$$

et on en déduit :

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_s}[S_1, \dots, S_{n+1}] / (P_1(S_1) - T_1, \dots, P_{n+1}(S_1, \dots, S_{n+1}) - T_{n+1}).$$

Cela conclut la démonstration. $\square$

Proposition 3.8. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ un point rigide épais et $s = f(x)$. On a alors :*

$$\mathfrak{m}_{X_s, x} = \sqrt{\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X_s, x}}.$$

On commence par démontrer le cas particulier des espaces affines sur $\mathcal{A}$.

Lemme 3.9. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $\pi : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ la projection sur les m premières coordonnées, $y_n \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ et $y_0 = \pi(y_n)$. On suppose que y_n est rigide épais relativement à π . On a alors :*

$$\mathfrak{m}_{\pi^{-1}(y_0), y_n} = \sqrt{\mathfrak{m}_{y_n} \mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0), y_n}}.$$

Démonstration. On fixe l'entier m et on procède par récurrence sur n .

Si $n = 0$ alors $\pi = \text{Id}_{\mathbb{A}^m}$, $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0), y_n} = \mathcal{H}(y_0)$ et on a donc bien $\mathfrak{m}_{\pi^{-1}(y_0), y_n} = 0 = \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^m, y_n} \mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0), y_n}}$.

Supposons à présent la propriété vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$. On note S la dernière coordonnée de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1}$ ainsi que $\pi_{+1} : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ la projection sur les m premières coordonnées. Soient $y_{n+1} \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1}$ un point rigide épais relativement à π_{+1} et $y_n \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ sa projection sur les $m + n$ premières coordonnées. Soient $P \in \kappa(y_n)[S]$ le polynôme minimal de y_{n+1} et $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ un voisinage compact spectralement convexe de y_n tel que les coefficients de P soient définis sur $\mathcal{B}(V)$. La propriété recherchée étant locale, on peut se restreindre à la démontrer sur $\mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$. D'après [Poi13, Théorème 8.8], P induit un morphisme $\varphi_P : \mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$ de sorte que $\varphi_P(y_{n+1})$ soit le point 0 au-dessus de y_n , noté 0_{y_n} , et φ_P induit un isomorphisme :

$$(2) \quad \mathcal{O}_{y_{n+1}} \cong \mathcal{O}_{0_{y_n}}[S] / (P(S) - T)$$

où T désigne la coordonnée de $\mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$ au but de φ_P . D'après le lemme 3.6, une fonction $f \in \mathcal{O}_{0_{y_n}}$ s'écrit $f = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i T^i$ où les a_i sont des éléments de $\mathcal{O}_{y_n}$. On a donc $f(0_{y_n}) = 0$ si et seulement si $a_0(y_n) = 0$ et on en déduit que :

$$(3) \quad \mathfrak{m}_{0_{y_n}} = \mathfrak{m}_{y_n} \mathcal{O}_{0_{y_n}} + T \mathcal{O}_{0_{y_n}}.$$

De même, on a $\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} = \mathfrak{m}_{\pi^{-1}(y_0), y_n} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} + T \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} = \sqrt{\mathfrak{m}_{y_n} \mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0), y_n} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}} + T \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}.$$

L'idéal $T \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}$ étant radiciel, on peut écrire :

$$\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} \subset \sqrt{\mathfrak{m}_{y_n} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} + T \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}}.$$

Cela donne bien l'inclusion $\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} \subset \sqrt{\mathfrak{m}_{0_{y_n}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}}$ d'après (3). L'inclusion réciproque étant triviale, l'égalité :

$$(4) \quad \mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}} = \sqrt{\mathfrak{m}_{0_{y_n}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}}$$

en découle.

On remarque à présent que, sous l'isomorphisme (2), l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{y_{n+1}}$ est engendré par $\mathfrak{m}_{0_{y_n}}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{O}_{0_{y_n}}[S] / (P(S) - T) \right) / (\mathfrak{m}_{0_{y_n}}) &\cong \kappa(0_{y_n})[S] / (P(S) - T) \\ &\cong \kappa(y_n)[S] / (P(S)) \\ &\cong \kappa(y_{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit que la préimage de l'idéal $\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}}}$ par la surjection $\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}[S] \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}}$ est

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}_{0_{y_n}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}[S] + (P(S) - T) \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}[S]}.$$

De plus, comme 0_{y_n} est rigide dans sa fibre, le corps résiduel de l'anneau $\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}$ vaut $\mathcal{H}(0_{y_n})$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}} / \sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}}} &\cong \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), 0_{y_n}}[S] / \mathfrak{m} \\ &\cong \mathcal{H}(0_{y_n})[S] / \sqrt{P(S) - T} \end{aligned}$$

d'après 4.

En écrivant $\mathcal{H}(0_{y_n})$ comme le quotient de $\mathcal{H}(y_n)[T]$ par (T) , on déduit :

$$\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}} / \sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}}} \cong \mathcal{H}(y_n)[S] / \sqrt{P(S)}.$$

Or, d'après [LP20, Lemme 1.6.23], l'idéal $\sqrt{P(S)} \subset \mathcal{H}(y_n)[S]$ est engendré par $\mu_{y_{n+1}}(S)$, polynôme minimal de y_{n+1} à coefficients dans $\mathcal{H}(y_n)$. On a donc à présent :

$$\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}} / \sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}}} \cong \mathcal{H}(y_n)[S] / (\mu_{y_{n+1}}(S)) \cong \mathcal{H}(y_{n+1}).$$

On en déduit que $\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}} \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0), y_{n+1}}}$ est bien maximal, ce qui conclut la récurrence. $\square$

Démonstration de la proposition 3.8. La propriété énoncée étant locale, on peut supposer que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et on dispose de $m \in \mathbb{N}$ et $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ une immersion. Alors la propriété énoncée est vérifiée pour f si et seulement si elle l'est pour $\iota \circ f$ et on se ramène au cas où $S = \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$.

D'après le lemme 3.5 et quitte à restreindre X , on peut supposer que X est un modèle local d'espace S -analytique. On dispose à présent de $n \in \mathbb{N}$ et de $\Gamma : X \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n \cong \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ une immersion d'espaces S -analytiques :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n} \\ & \searrow f & \swarrow \pi_S \\ & \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m & \end{array} .$$

D'après le lemme 3.9, on a $\mathfrak{m}_{\pi_S^{-1}(s), \Gamma(x)} = \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}, \Gamma(x)} \mathcal{O}_{\pi_S^{-1}(s), \Gamma(x)}}$. Soient $U \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ un voisinage ouvert de $\Gamma(x)$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ un faisceau cohérent

d'idéaux vérifiant $X = \text{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I})$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{X_s, x} &= \mathfrak{m}_{\pi_S^{-1}(s), \Gamma(x)} / \mathcal{I}_{\Gamma(x)} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}, \Gamma(x)} \mathcal{O}_{\pi_S^{-1}(s), \Gamma(x)}} / \mathcal{I}_{\Gamma(x)} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}, \Gamma(x)} \mathcal{O}_{\pi_S^{-1}(s), \Gamma(x)}} / \mathcal{I}_{\Gamma(x)} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_{X, x} \mathcal{O}_{X_s, x}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.10. Si les polynômes $P(S)$ et $\mu_{y_{n+1}}(S)$ engendraient le même idéal de $\mathcal{H}(y_n)[S]$, la preuve du lemme 3.9 pourrait être écrite sans les radicaux. C'est le cas lorsque $\kappa(x)$ est une extension séparable de $\kappa(s)$ par [Ber93, Proposition 2.4.1]. Sous cette hypothèse, on a donc $\mathfrak{m}_{X_s, x} = \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X_s, x}$.

Lemme 3.11. Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces S -analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x . Soit $I \subset \mathcal{O}_y$ un idéal. On suppose que x est rigide épais relativement à f . Si $\mathcal{O}_y/I\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{Y_s, y}/I\mathcal{O}_{Y_s, y}$ est plat alors $\mathcal{O}_x/I\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}/I\mathcal{O}_{X_s, x}$ est plat.

Démonstration. Cette propriété étant locale, on peut supposer que X est un modèle local d'espace Y -analytique et on dispose alors de $n \in \mathbb{N}$ et d'une immersion d'espaces Y -analytiques $\Gamma : X \hookrightarrow \mathbb{A}_Y^n$. Comme Γ est une immersion, il suffit de montrer la propriété pour $\pi_Y : \mathbb{A}_Y^n \rightarrow Y$. On suppose donc $X = \mathbb{A}_Y^n$ et $f = \pi_Y$.

On note 0_y le point 0 de la fibre de X au-dessus de y . D'après le lemme 3.7, on dispose de polynômes $P_1 \in \mathcal{O}_{0_y}[S_1]$, $P_2 \in \mathcal{O}_{0_y}[S_1, S_2]$, $\dots$, $P_n \in \mathcal{O}_{0_y}[S_1, \dots, S_n]$ tels que, en notant $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $X = \mathbb{A}_Y^n$, on ait un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_y}[S_1, \dots, S_n] / (P_1(S_1) - T_1, \dots, P_n(S_1, \dots, S_n) - T_n).$$

Il suffit de donc de montrer le résultat dans le cas où $x = 0_y$.

D'après le critère local de platitude [SGA1, Exposé IV, Proposition 5.6], le morphisme

$$\mathcal{O}_x / I\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s, x} / I\mathcal{O}_{X_s, x}$$

est plat si et seulement si le morphisme induit

$$\mathcal{O}_x / (I + (T_1, \dots, T_n)^l) \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s, x} / (I + (T_1, \dots, T_n)^l) \mathcal{O}_{X_s, x}$$

est plat pour tout $l \geq 1$. Or, d'après le lemme 3.6, ce dernier est égal au morphisme

$$\left(\mathcal{O}_y / I\mathcal{O}_y\right)[T_1, \dots, T_n] / (T_1, \dots, T_n)^l \longrightarrow \left(\mathcal{O}_{Y_s, y} / I\mathcal{O}_{Y_s, y}\right)[T_1, \dots, T_n] / (T_1, \dots, T_n)^l$$

induit par $\mathcal{O}_y / I\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{Y_s, y} / I\mathcal{O}_{Y_s, y}$ qui est plat par hypothèse. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Corollaire 3.12. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ un point rigide épais et $s = f(x)$. Alors l'anneau $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est un corps si et seulement si $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$ en est un.*

Démonstration. D'après le lemme 3.11 appliqué à $Y = S$ et $I = \mathfrak{m}_s$, le morphisme $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}$ est plat et

$$\mathcal{O}_{X_s, x} \bigotimes_{\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x} \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_s \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_s, x} \bigotimes_{\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{X_s, x}$$

est donc une injection. Son image coïncide avec $(\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_s) \mathcal{O}_{X_s, x} \cong \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X_s, x}$. Donc, si $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est un corps, $\mathcal{O}_{X_s, x} \bigotimes_{\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x} \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_s = 0$ et donc $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_s = 0$ par fidèle platitude. Dans ce cas, $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$ est bien un corps. Réciproquement, si $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$ est un corps, alors $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X_s, x} = 0$ et $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est un corps d'après 3.8. $\square$

Remarque 3.13. *Le théorème 4.4 montre que le sens direct du corollaire 3.12 est en fait vérifié pour tout point.*

4. MORPHISMES PLATS

Cette section est consacrée à la démonstration ainsi qu'aux corollaires du théorème 4.4. Elle se fonde sur des résultats de la section 3.

Définition 4.1. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{A}_S^n$ et $s \in S$ l'image de x . On note $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}_S^n$. On dit que x est purement localement transcendant au-dessus de s si les éléments $1, T_1(x), \dots, T_n(x)$ sont algébriquement indépendants sur $\kappa(s)$.*

Lemme 4.2. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{A}_S^n$ un point purement localement transcendant au-dessus de s . Alors $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$.*

Démonstration. La propriété étant locale, on peut supposer que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et on dispose alors de $m \in \mathbb{N}$ et d'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}$ vérifiant $S \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m} / \mathcal{I})$ et $\mathbb{A}_S^n \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}} / \mathcal{I} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}})$. On note s' (resp. x') l'image de s (resp. x) dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$). Alors x' est purement localement

transcendant au-dessus de s' et, d'après [Poi13, Corollaire 9.11], on a $\mathfrak{m}_{x'} = \mathfrak{m}_{s'}\mathcal{O}_{x'}$. On en conclut $\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_{s'}\mathcal{O}_{x'}/\mathcal{I}_{s'} = \mathfrak{m}_{x'}/\mathcal{I}_{s'} = \mathfrak{m}_x$. $\square$

Lemme 4.3. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On dispose alors de voisinages $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s et de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(U) \subset V$, $f|_U$ se factorise par $\pi_V : \mathbb{A}_V^n \rightarrow V$ et, en notant $y \in \mathbb{A}_V^n$ l'image de x , y est purement localement transcendant au-dessus de s et x est rigide épais au-dessus de y .*

Démonstration. D'après le lemme 3.5, on dispose de $V \subset S$ un voisinage de s qui est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et $U \subset f^{-1}(V)$ un voisinage de x qui est un modèle local d'espace V -analytique. On dispose alors de $m, l \in \mathbb{N}$ et d'immersions $V \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ et $U \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+l}$. On note s' (resp. x') l'image de s (resp. x) dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+l}$). D'après [LP20, Remarque 1.6.20] et quitte à permuter les l dernières coordonnées de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+l}$, on dispose de $n \leq l$ tel que la projection y' de x' dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ soit purement localement transcendante au-dessus de s' et que x' soit rigide épais au-dessus de y' . On note $y \in \mathbb{A}_S^n$ l'unique point d'image $y' \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$. Alors y est purement localement transcendant au-dessus de s et x est rigide épais au-dessus de y . $\square$

Théorème 4.4. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors le morphisme*

$$\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}$$

est plat.

Démonstration. D'après le lemme 4.3 et quitte à restreindre X et S , on dispose de $n \in \mathbb{N}$ tel que f se factorise par $\pi_S : \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$ et, en notant $y \in \mathbb{A}_S^n$ l'image de x , y est purement localement transcendant au-dessus de s et x est rigide épais au-dessus de y . On déduit du lemme 4.2 que $\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_y$ est un corps et le morphisme $\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{Y_s, y}$ est donc plat. Comme x est rigide épais au-dessus de y , on peut appliquer le lemme 3.11 et on en conclut que le morphisme $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}$ est plat. $\square$

Corollaire 4.5 (Critère de platitude par fibres). *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces S -analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x . On suppose que $X \rightarrow S$ est plat en x . Si $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ est plat en x alors $f : X \rightarrow Y$ est plat en x et $Y \rightarrow S$ est plat en y .*

Démonstration. D'après le théorème 4.4, les morphismes $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \rightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}$ et $\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_s \rightarrow \mathcal{O}_{Y_s, y}$ sont plats. En composant ce dernier par le morphisme $\mathcal{O}_{Y_s, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X_s, x}$, plat par hypothèse, on en déduit que $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est plat sur $\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_s$. Ces morphismes étant locaux, ils sont fidèlement plats. D'après [Stacks, Tag 039V], on en conclut que $\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_s \rightarrow \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s$

est plat et donc, d'après [Stacks, Tag 00MP], $\mathcal{O}_s \rightarrow \mathcal{O}_y$ et $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ sont plats. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Corollaire 4.6. *Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de $\mathcal{A}$ -schémas au-dessus de $\mathcal{S}$ et S un espace $\mathcal{A}$ -analytique au-dessus de $\mathcal{S}^{\text{an}}$. On note $\mathcal{X}_S = \mathcal{X}^{\text{an}} \times_{\mathcal{S}^{\text{an}}} S$ et $\mathcal{Y}_S = \mathcal{Y}^{\text{an}} \times_{\mathcal{S}^{\text{an}}} S$ et on suppose que $\mathcal{X}_S \rightarrow S$ est plat en un point $\tilde{x} \in \mathcal{X}_S$. On pose $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$ et $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_S$ les images de $\tilde{x}$. Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est plat en $\rho(x)$ alors $f_S : \mathcal{X}_S \rightarrow \mathcal{Y}_S$ est plat en $\tilde{x}$ et $\mathcal{Y}_S \rightarrow S$ est plat en $\tilde{y}$.*

Remarque 4.7. — *Soit $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$ -schéma localement de présentation finie. Alors*

$$(\mathcal{X} \times_{\mathbb{R}} \text{Spec}(\mathbb{C}))^{\text{an}} \cong \mathcal{X}^{\text{an}} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

par propriété universelle.

— *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces $\mathbb{R}$ -analytiques et $x \in X$. Si $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \rightarrow Y_{\mathbb{C}}$ est plat en tout point de $p_X^{-1}(x)$, alors f est plat en x . En effet, cela implique que le morphisme $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Pi_{z \in p_X^{-1}(x)} \mathcal{O}_z \rightarrow \mathcal{O}_y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Pi_{z \in p_X^{-1}(x)} \mathcal{O}_{f(z)}$ est plat et on conclut par [Stacks, Tag 00HJ].*

Démonstration. On pose $s \in S$ l'image de $\tilde{x}$. Comme $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est plat en $\rho(x)$, $f \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)) : \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)) \rightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s))$ est plat en tout point au-dessus de $\rho(x)$. Si $\mathcal{H}(s)$ est archimédien, on peut supposer $\mathcal{H}(s) \cong \mathbb{C}$ d'après la remarque 4.7 et on déduit de [SGA1, Exposé XII, Proposition 3.1] que $(f \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\text{an}} : (\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\text{an}} \rightarrow (\mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\text{an}}$ est plat en tout point au-dessus de $\rho(x)$. Si $\mathcal{H}(s)$ est non-archimédien, on obtient le même résultat par [Ber90, Proposition 3.4.6]. Or, par propriété universelle, on a $(\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\text{an}} \cong (\mathcal{X}_S)_s$ et $(\mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \text{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\text{an}} \cong (\mathcal{Y}_S)_s$. On en déduit que le morphisme $\mathcal{O}_{(\mathcal{Y}_S)_s, \tilde{y}} \rightarrow \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_S)_s, \tilde{x}}$ est plat. Par le corollaire 4.5, on conclut que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_S, \tilde{y}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_S, \tilde{x}}$ et $\mathcal{O}_s \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_S, \tilde{y}}$ sont plats. $\square$

Si $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique alors [LP20, Proposition 6.6.7] s'applique et on déduit des corollaires 2.25 et 4.6 le critère suivant :

Corollaire 4.8. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de $\mathcal{A}$ -schémas et $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. On suppose que $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ est plat en $\rho(x)$. Alors $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est plat en $\rho(x)$ si et seulement si $f^{\text{an}} : \mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{Y}^{\text{an}}$ est plat en x .*

Corollaire 4.9. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $n \in \mathbb{N}$. Le morphisme de projection $\pi_S : \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$ est plat.*

Démonstration. On commence par montrer que $\pi : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est plat. Soient $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ et $s = \pi(x)$. On montre que π est plat en x . Si

$\mathcal{O}_s$ est un corps alors le résultat est immédiat et on se ramène donc au cas où $\mathcal{O}_s$ est un anneau de valuation discrète dont on notera ϖ une uniformisante. Il suffit de montrer que $\mathcal{O}_x$ est sans ϖ -torsion. Comme $\mathcal{O}_x$ est intègre, cela revient à montrer $\pi_x^\sharp(\varpi) \neq 0$. Soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ un voisinage ouvert de x . Alors, d'après la proposition 1.3, $\pi(U)$ est un voisinage ouvert de s . Si ϖ s'annulait en tout point de $\pi(U)$, alors on déduirait du théorème 2.21 que ϖ est nilpotent dans $\mathcal{O}_s$, ce qui est faux. On dispose alors de $t \in \pi(U)$ vérifiant $\varpi(t) \neq 0$ et il existe $z \in U_t$ tel que $\varpi(z) = \varpi(t) \neq 0$. On en déduit que $\pi_x^\sharp(\varpi) \neq 0$ et que π est plat en x .

On revient à présent sur le cas général. Soient $x \in \mathbb{A}_S^n$ et $s = \pi_S(x)$. On montre que π_S est plat en x . La propriété recherchée étant locale, on peut supposer que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$ -analytique et on dispose alors de $m \in \mathbb{N}$ et d'un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}$ vérifiant $S \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}/\mathcal{I})$ et $\mathbb{A}_S^n \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}})$. En notant s' (resp. x') l'image de s (resp. x) dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}$), on obtient $\mathcal{O}_s \cong \mathcal{O}_{s'}/\mathcal{I}_{s'}$ et $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{x'}/\mathcal{I}_{s'}\mathcal{O}_{x'}$ et on se ramène donc au cas où $S = \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$. Comme cela a été démontré ci-dessus, le morphisme $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est plat et on obtient alors le résultat en appliquant le corollaire 4.6 au morphisme $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m, \text{sch}} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m, \text{sch}}$. $\square$

5. DIMENSION ALGÈBRIQUE

Dans cette section, on établit des résultats sur la dimension de Krull des anneaux locaux en certains points. On notera que la stratégie de démonstration du lemme 5.5 et de la proposition 5.7 est la même que celle présentée dans [GR84] dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

Définition 5.1. *Soit X un espace $\mathcal{A}$ -analytique. Un point $x \in X$ sera dit défini par des équations s'il existe une immersion $\{x\} \hookrightarrow X$, c'est-à-dire que l'on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et de fonctions $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_d)) = \{x\}$.*

Remarque 5.2. *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $x \in X$ un point défini par des équations et $g_1, \dots, g_l$ des fonctions définies sur un voisinage de x et vérifiant $(g_1, \dots, g_l)\mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$. Par définition, on dispose d'un ouvert $U \subset X$ et de fonctions $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}(U)$ tels que $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_d)) = \{x\}$. Alors $(f_1, \dots, f_d)\mathcal{O}_x \subset (g_1, \dots, g_l)\mathcal{O}_x$ et donc, quitte à restreindre U , on a $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_d)) \supset \text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_l))$. On en déduit que $\{x\} = \text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_l))$.*

Lemme 5.3. *Soient k un corps valué complet et X un espace k -analytique. Alors tous les points rigides de X sont définis par des équations.*

Démonstration. Soit $x \in X$ un point rigide. Les propriétés énoncées étant locales, on peut supposer que X est un modèle local d'espace

k -analytique. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier et $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ une immersion. Alors $\iota(x)$ est rigide et, s'il est défini par des équations, alors x l'est aussi. On se ramène donc au cas où $X = \mathbb{A}_k^n$. Le point $\xi = \rho(x) \in \mathbb{A}_k^{n, \text{sch}}$ est associé à un idéal premier $I \subset k[T_1, \dots, T_n]$ égal au noyau du morphisme d'évaluation $k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$. Comme x est rigide, $\mathcal{H}(x)$ est entier sur k et donc sur son sous-anneau $k[T_1, \dots, T_n]/I$. Donc, d'après [Bos13, Remarque 3.1.2], $k[T_1, \dots, T_n]/I$ est un corps, I est maximal et ξ est un point fermé. Pour tout point $y \in \rho^{-1}(\xi)$, on a $\mathcal{H}(y) = \widehat{k[T_1, \dots, T_n]/I} = \widehat{\kappa(\xi)}$. Comme $\kappa(\xi)$ est fini sur k , on en déduit que $\kappa(\xi)$ est complet et égal à $\mathcal{H}(y)$. On peut donc associer à y un unique diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(\kappa(\xi)) & \xrightarrow{\rho_{\kappa(\xi)}} & \text{Spec}(\kappa(\xi)) & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{A}_k^{n, \text{sch}} \\ & \searrow y & & \nearrow \rho & \\ & & \mathbb{A}_k^n & & \end{array} .$$

L'unicité de la flèche en pointillés étant assurée par la propriété universelle de l'analytification, on en déduit que $y = x$ et donc $\rho^{-1}(\xi) = \{x\}$. Pour finir, on sait que I vérifie $\{\xi\} = V(I) \subset \mathbb{A}_k^{n, \text{sch}}$ et engendre un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}$ vérifiant $\rho^{-1}(\xi) = \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}/\mathcal{I})$. On en déduit que $\text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}/\mathcal{I}) = \{x\}$ et x est donc bien défini par des équations. $\square$

Remarque 5.4. *Il semble difficile de caractériser algébriquement les points définis par des équations lorsque l'anneau de base n'est pas un corps valué complet. On peut noter l'exemple de $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{\text{hyb}})$ dont aucun point n'est défini par des équations malgré leurs bonnes propriétés algébriques : $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{\text{hyb}})$ s'écrit comme l'analytifié du schéma $\text{Spec}(\mathbb{C}^{\text{hyb}})$ et, pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{\text{hyb}})$, $\rho(x) \in \text{Spec}(\mathbb{C}^{\text{hyb}})$ est un point fermé vérifiant $\kappa(\rho(x)) = \mathcal{H}(x)$.*

Lemme 5.5. *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $x \in X$ un point défini par des équations, $U \subset X$ un voisinage ouvert de x et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$. Alors x est isolé dans $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n))$ si et seulement si l'anneau $\mathcal{O}_x/(f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x$ est artinien.*

Démonstration. Quitte à restreindre U , on peut choisir des fonctions $g_1, \dots, g_l \in \mathcal{O}(U)$ telles que $\mathfrak{m}_x = (g_1, \dots, g_l)\mathcal{O}_x$.

On suppose tout d'abord que x est isolé dans $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n))$. Alors, d'après la remarque 5.2, on peut restreindre U pour avoir

$$\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n)) = \{x\} = \text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_l)).$$

Donc, d'après le théorème 2.21, on a $\text{rad}((f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_U) = \text{rad}((g_1, \dots, g_l)\mathcal{O}_U)$. On en déduit que $\text{rad}((f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x) = \mathfrak{m}_x$ et donc que $\mathcal{O}_x/(f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x$ est artinien.

Réciproquement, on suppose à présent que $\mathcal{O}_x/(f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x$ est artinien. Alors $\text{rad}((f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x) = \mathfrak{m}_x = (g_1, \dots, g_l)\mathcal{O}_x$ et on dispose d'un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que $(g_1^s, \dots, g_l^s)\mathcal{O}_x \subset (f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x$. Donc, quitte à restreindre U , on a $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1^s, \dots, g_l^s)) \supset \text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n))$. Or, $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1^s, \dots, g_l^s))$ est en bijection avec $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_l))$ qui est simplement réduit à $\{x\}$ d'après la remarque 5.2. On en déduit que $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n)) = \{x\}$. $\square$

Le résultat suivant est un exemple d'application du lemme 5.5 :

Corollaire 5.6. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ un point isolé dans sa fibre et $s = f(x)$. Alors les anneaux $\mathcal{O}_{X_s, x}$ et $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ sont artiniens.*

Démonstration. Comme x est isolé dans X_s , il y est défini par des équations et on déduit du lemme 5.5 que son anneau local $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est artinien. Or, par le théorème 4.4, on sait que $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est un $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ -module fidèlement plat. En particulier, l'application induite $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X_s, x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x)$ est surjective par [SGA1, Exposé IV, Proposition 2.6] et on en déduit que $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est aussi artinien par [Stacks, Tag 00KJ]. $\square$

Proposition 5.7. *Soient X un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $x \in X$ un point défini par des équations. Alors $\dim(\mathcal{O}_x) \leq n$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ tels que x soit isolé dans $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n))$.*

Démonstration. On pose $d = \dim(\mathcal{O}_x)$ et n l'entier minimal tel qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_n)) = \{x\}$. Quitte à rétrécir U , le lemme 5.5 assure l'existence de fonctions $g_1, \dots, g_d \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $\text{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_d)) = \{x\}$, ce qui implique que $n \leq d$. Le même lemme assure que $\mathcal{O}_x/(f_1, \dots, f_n)\mathcal{O}_x$ est un anneau artinien, ce qui implique que $d \leq n$. On en déduit le résultat. $\square$

6. MORPHISMES NON RAMIFIÉS

Dans cette section, on étudie les morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques non ramifiés et on répond au passage à une conjecture énoncée dans [LS19, (2.2.9)]. On ne développe pas de théorie des différentielles de Kähler.

Définition 6.1. *Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $f : X \rightarrow S$ est non ramifié en $x \in X$ si $f_x^{\sharp} : \mathcal{O}_s \rightarrow \mathcal{O}_x$ est non ramifié avec $s = f(x)$, c'est-à-dire $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ et $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$. Un morphisme $f : X \rightarrow S$ est non ramifié s'il l'est en tout point de X .*

On rappelle que le corollaire 1.14 indique que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ si et seulement si $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$.

Remarque 6.2. *Si f est non ramifié en x alors x est rigide épais relativement à f .*

Proposition 6.3. *Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors :*

- i) *Si f est une immersion alors f est non ramifié.*
- ii) *Si f est non ramifié en x et g est non ramifié en y alors $g \circ f$ est non ramifié en x .*

Démonstration. i) Si f est une immersion alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un quotient de $\mathcal{O}_{Y,y}$. On en déduit le résultat.

ii) Immédiat. □

Proposition 6.4. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors f est non ramifié en x si et seulement si le morphisme $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x .*

Démonstration. Le corollaire 1.14 assure que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ si et seulement si $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. En particulier, on peut supposer que x est rigide épais.

Il reste à montrer que $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$ si et seulement si $\mathfrak{m}_{X_s,x} = \mathfrak{m}_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)),s} \mathcal{O}_{X_s,x}$. Comme $\mathfrak{m}_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)),s} = 0$, cela revient à montrer que $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$ est un corps si et seulement si $\mathcal{O}_{X_s,x}$ en est un. C'est une conséquence du corollaire 3.12. □

Corollaire 6.5. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Si f est non ramifié en x alors x est isolé dans X_s . De plus, $f : X \rightarrow S$ est fini en x .*

Démonstration. D'après la proposition 6.4, on sait que $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x et on en déduit que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps. Comme x est rigide dans X_s , on déduit du lemme 5.3 qu'il est défini par des équations et de la proposition 5.7 qu'il est isolé.

On en déduit que f est fini en x par [LP20, Théorème 5.2.8]. □

Corollaire 6.6. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Si f est non ramifié en x alors $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_s$ -module de présentation finie.*

Démonstration. C'est une conséquence des corollaires 6.5 et 2.20. □

Corollaire 6.7. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors f est non ramifié si et seulement si, pour tout point $s \in S$, la fibre X_s s'écrit $\coprod_i \mathcal{M}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que $f : X \rightarrow S$ est non ramifié. Soit $s \in S$. D'après la proposition 6.4, $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié et on déduit du corollaire 6.5 que X_s est discret et s'écrit donc comme une union disjointe de points. Il suffit à présent de traiter le cas $X_s = \{x\}$. Comme $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x , on a $\mathfrak{m}_{X_s, x} = 0$ et $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est un corps. Le point x étant rigide dans X_s , on en déduit que $\mathcal{O}_{X_s, x} \cong \mathcal{H}(x)$. On a donc bien $X_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ et $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$ car $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié.

Réciproquement, on suppose que pour tout point $s \in S$, la fibre X_s s'écrit $\coprod_i \mathcal{M}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$. Alors, pour tout $x \in X_s$, $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est l'un de ces K_i . On en déduit que $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié puis que $f : X \rightarrow S$ est non ramifié par la proposition 6.4. $\square$

Corollaire 6.8. *Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie et $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Si f est non ramifié en $\rho(x)$ alors f^{an} est non ramifié en x .*

On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Alors f est non ramifié en $\rho(x)$ si et seulement si f^{an} est non ramifié en x .

Démonstration. On suppose tout d'abord que f est non ramifié en $\rho(x)$. Soient $s = f^{\text{an}}(x) \in \mathcal{S}^{\text{an}}$ et $\sigma = \rho_{\mathcal{S}}(s) \in \mathcal{S}$. Quitte à restreindre $\mathcal{X}$, on a $\mathcal{X}_{\sigma} \cong \coprod_i \text{Spec}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\kappa(\sigma)$ d'après [Bos13, Corollaire 8.4.4]. Pour tout i , on note $\coprod_j K_{i,j}$ le produit tensoriel $K_i \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s)$ où les $K_{i,j}$ sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$ d'après [Wei95, Proposition III.2.2]. On obtient :

$$\mathcal{X}_{\sigma} \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s) \cong \coprod_{i,j} \text{Spec}(K_{i,j}).$$

Or, d'après le lemme 2.14, on a $(\mathcal{X}^{\text{an}})_s \cong (\mathcal{X}_{\sigma} \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s))^{\text{an}}$ et on en déduit :

$$(\mathcal{X}^{\text{an}})_s \cong \coprod_{i,j} \mathcal{M}(K_{i,j}).$$

Ceci permet de conclure d'après le corollaire 6.7.

On suppose à présent que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique et que f^{an} est non ramifié en x . Alors $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. On note $\tilde{\xi}$ l'image de x dans $\mathcal{X}_{\sigma} \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s)$. Comme x est rigide dans $(\mathcal{X}^{\text{an}})_s$, on a $\kappa(\tilde{\xi}) \cong \mathcal{H}(x)$ et $\kappa(\tilde{\xi})$ est donc une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. De plus, d'après le théorème 2.24, le morphisme $\mathcal{O}_{\tilde{\xi}} \rightarrow \mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x}$ est plat. Le morphisme naturel $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\xi}}} \mathfrak{m}_{\tilde{\xi}} \rightarrow \mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x}$ est donc une injection d'image $\mathfrak{m}_{\tilde{\xi}} \mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x}$. Comme $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x}$ est un corps, on a $\mathfrak{m}_{\tilde{\xi}} \mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x} = 0$ et donc $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}^{\text{an}})_s, x} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\xi}}} \mathfrak{m}_{\tilde{\xi}} = 0$. Par fidélité platitude, on en déduit $\mathfrak{m}_{\tilde{\xi}} = 0$ et le morphisme $\mathcal{X}_{\sigma} \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s) \rightarrow$

$\text{Spec}(\mathcal{H}(s))$ est donc non ramifié en $\tilde{\xi}$. On en conclut que f_σ est non ramifié en ξ par [Bos13, Proposition 8.1.11] et donc que f est non ramifié en ξ . $\square$

Remarque 6.9. *Sans supposer que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique, on peut montrer que, si f^{an} est non ramifié en tout point de $(f^{\text{an}})^{-1}(f^{\text{an}}(x))$, alors f est non ramifié en $\rho(x)$ par le corollaire 6.7.*

Corollaire 6.10. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et S' un espace S -analytique. Si $f : X \rightarrow S$ est non ramifié alors $f_{S'} : X \times_S S' \rightarrow S'$ est non ramifié.*

Démonstration. Soient $s' \in S'$ et $s \in S$ l'image de s' . D'après le corollaire 6.7, X_s s'écrit $\coprod_i \mathcal{M}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_{S'}^{-1}(s') &\cong (X \times_S S') \times_{S'} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong X \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong (X \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))) \times_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong X_s \times_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i) \times_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i \widehat{\otimes}_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{H}(s')) \\ &\cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i \otimes_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{H}(s')) \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme vient du fait que les K_i sont finis sur $\mathcal{H}(s)$. On déduit alors de [Wei95, Proposition III.2.2] que $f_{S'}^{-1}(s')$ s'écrit $\coprod_{i,j} \mathcal{M}(K_{i,j})$ où les $K_{i,j}$ sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s')$. On conclut par le corollaire 6.7. $\square$

Lemme 6.11. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Soient maintenant K une extension finie de $\mathcal{H}(s)$ et $x_1, \dots, x_n \in X_K = X \times_S \mathcal{M}(K)$ les points au-dessus de x . On suppose que le morphisme structural $X_K \rightarrow \mathcal{M}(K)$ est non ramifié en $x_1, \dots, x_n$. Alors $f : X \rightarrow S$ est non ramifié en x .*

Démonstration. D'après la proposition 2.18, on a :

$$\mathcal{O}_{X_s, x} \otimes_{\mathcal{H}(s)} K \cong \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_K, x_i}.$$

Or, d'après le corollaire 6.7, les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X_K, x_i}$ sont des extensions finies séparables de K . On déduit alors de [Bos13, Lemme 8.4.7] que $\mathcal{O}_{X_s, x}$ s'écrit comme produit d'extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$. Un tel produit ne pouvant être un anneau local que s'il comporte un unique facteur, on obtient que $\mathcal{O}_{X_s, x}$ est un corps ainsi qu'une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$ et donc que $f_s : X_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x . La proposition 6.4 permet donc de conclure. $\square$

Proposition 6.12. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $x \in X$. Alors $f : X \rightarrow S$ est non ramifié en x si et seulement si le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ est un isomorphisme local en x .*

Démonstration. On commence par remarquer que Δ_f est une immersion par la proposition 2.16. Donc, d'après le lemme 2.8 et la proposition 6.4 et quitte à remplacer X par X_s et S par $\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$, on peut supposer que $S = \mathcal{M}(k)$ où k est un corps valué complet.

On suppose que f est non ramifié en x . On peut alors supposer que X est réduit à un point $X \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$. Comme $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de k , [Wei95, Proposition III.2.2] assure que $\mathcal{H}(x) \otimes_k \mathcal{H}(x) \cong \prod_i K_i$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(x)$. On en déduit que $X \times_k X \cong \prod_i \mathcal{M}(K_i)$. Comme Δ_f est une immersion, $\mathcal{H}(\Delta_f(x)) = \mathcal{H}(x)$ et donc $\mathcal{O}_{\Delta_f(x)} \cong \mathcal{H}(x) \cong \mathcal{O}_x$. On en conclut que $\Delta_f : X \rightarrow X \times_k X$ est un isomorphisme local en x .

Réciproquement, on suppose que Δ_f est un isomorphisme local en x . D'après la proposition 2.16, Δ_f est une immersion donc, quitte à rétrécir X , on peut supposer que c'est une immersion ouverte. On commence par montrer qu'il est possible de se ramener au cas où X est réduit à un point rationnel.

On suppose tout d'abord que la valeur absolue sur k n'est pas triviale. Dans ce cas, les points rigides sont denses dans X et donc, par connexité locale de X , on dispose d'un point rigide x_{rig} dans la composante connexe de x . Soient $x_1, \dots, x_n \in X \times_k \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ les points au-dessus de x . Par propriété universelle du produit fibré, la composante connexe de x_i contient un point au-dessus de x_{rig} qui est rationnel pour tout $i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket$. D'après le lemme 6.11, on peut donc supposer x_{rig} rationnel et on note $\widetilde{x}_{\text{rig}}$ la section de f induite. On note maintenant p_1 et p_2 les projections $X \times_k X \rightrightarrows X$ et on considère le morphisme $h : X \rightarrow X \times_k X$ vérifiant $p_1 \circ h = \text{Id}$ et $p_2 \circ h$ est la composition de $\widetilde{x}_{\text{rig}}$ et du morphisme structural de X , comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}(k) & & \\
 \searrow h & & \downarrow \widetilde{x}_{\text{rig}} & & \\
 & & X & \xrightarrow{p_2} & X \\
 \downarrow \text{Id} & & \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 & & X & \longrightarrow & \mathcal{M}(k)
 \end{array}$$

On a $h^{-1}(\Delta_f(X)) = \{x_{\text{rig}}\}$. Comme Δ_f est une immersion ouverte, on en déduit que $\{x_{\text{rig}}\}$ est isolé. On en conclut que $x = x_{\text{rig}}$ est un point rationnel isolé de X .

On suppose à présent que la valeur absolue sur k est triviale. Soit K une extension complète non trivialement valuée de k . Alors on peut appliquer le raisonnement ci-dessus en un point $x_K \in X_K$ au-dessus de x et on en déduit que x_K est un point rigide isolé de X_K . D'après [Duc07, Lemme 1.21], on a $\dim_{K, x_K} X_K = 0$. On en déduit par [Duc07, Proposition 1.22] que $\dim_{k, x} X = 0$ et donc x est un point rigide isolé dans X que l'on peut de nouveau supposer rationnel par le lemme 6.11.

On peut donc se ramener au cas où X est réduit à un point rationnel x . D'après le lemme 2.15, $X \times_k X$ est aussi réduit à un point et Δ_f induit donc un isomorphisme $X \cong X \times_k X$. On note $p_1, p_2 : X \times_k X \rightrightarrows X$ les projections naturelles. L'immersion fermée $\mathcal{M}(k) \cong X^{\text{red}} \hookrightarrow X$ définie par $\mathfrak{m}_x$ induit une immersion fermée

$$X \cong X \times_k \mathcal{M}(k) \longrightarrow X \times_k X \cong X$$

définie par $p_2^* \mathfrak{m}_x$. On a donc $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_x / p_2^* \mathfrak{m}_x$ et on en déduit $p_2^\#(\mathfrak{m}_x) = p_2^* \mathfrak{m}_x = 0$ et donc $\mathfrak{m}_x = \Delta_f^\#(p_2^\#(\mathfrak{m}_x)) = 0$. Alors $X \cong \mathcal{M}(k)$ et on en conclut que $f : X \rightarrow \mathcal{M}(k)$ est bien non ramifié. $\square$

Corollaire 6.13. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors l'ensemble $\{x \in X \mid f \text{ est non ramifié en } x\}$ est ouvert dans X .*

Démonstration. Ce résultat découle directement de la proposition 6.12. $\square$

Corollaire 6.14. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces S -analytiques et $x \in X$. On suppose que $Y \rightarrow S$ est non ramifié en $f(x)$. Alors le graphe $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_S Y$ est un isomorphisme local en x .*

Démonstration. D'après la proposition 6.12, on dispose d'un voisinage ouvert $V \subset Y$ de $f(x)$ tel que Δ soit un isomorphisme $V \rightarrow V \times_S V$. On pose $U = f^{-1}(V)$. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Gamma_f} & U \times_S V \\ \downarrow f & & \downarrow f \times \text{Id}_V \\ V & \xrightarrow{\Delta} & V \times_S V \end{array}$$

étant cartésien, on en déduit que $\Gamma_f : U \rightarrow U \times_S V$ est aussi un isomorphisme. $\square$

Corollaire 6.15. *Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. On suppose que $g \circ f$ est fini et plat en x et que g est non ramifié en y . Alors f est fini et plat en x .*

Démonstration. D'après le corollaire 6.14, le graphe $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_Z Y$ est un isomorphisme local en x . Or, d'après [LP20, Proposition 5.6.5], $p_Y : X \times_Z Y \rightarrow Y$ est fini et plat en tout point au-dessus de x . Donc $f = p_Y \circ \Gamma_f$ est fini et plat en x . $\square$

Corollaire 6.16. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non ramifié d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors toute section $\sigma : Y \rightarrow X$ de f est une immersion ouverte.*

Démonstration. On commence par remarquer que toutes les sections sont des immersions. En effet, si σ est une section de f alors c'est un morphisme au-dessus de Y et il coïncide avec son graphe $\Gamma_\sigma : Y \rightarrow X \times_Y Y \cong X$. On déduit donc de la proposition 2.16 que σ est une immersion.

On suppose maintenant que f est non ramifié. Comme $f \circ \sigma = \text{Id}_Y$, on déduit du corollaire 6.15 que σ est plat puis du lemme 2.9 que c'est une immersion ouverte. $\square$

7. MORPHISMES ÉTALES

On étudie ici les morphismes étales d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. On présente des résultats semblables à ceux des morphismes de schémas, avec quelques différences dans le cas du lemme 7.4 et de son corollaire 7.7.

Définition 7.1. *Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $f : X \rightarrow S$ est étale en $x \in X$ si $f_x^\# : \mathcal{O}_s \rightarrow \mathcal{O}_x$ est étale avec $s = f(x)$. C'est-à-dire $f_x^\# : \mathcal{O}_s \rightarrow \mathcal{O}_x$ est plat et non ramifié.*

Un morphisme $f : X \rightarrow S$ est étale s'il l'est en tout point de X .

Proposition 7.2. *Soient $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ et $h : Y' \rightarrow Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors :*

- i) *Si f est étale en x et g est étale en y alors $g \circ f$ est étale en x .*
- ii) *Si f est étale en x alors $f_{Y'} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est étale en tout point au-dessus de x .*
- iii) *Si $g \circ f$ est étale en x et g est non ramifié en y alors f est étale en x .*
- iv) *Si f et h sont étales alors tout morphisme $X \rightarrow Y'$ au-dessus de Y est étale.*

Démonstration. i) est immédiat.

ii) Soit $x' \in X \times_Y Y'$ un point au-dessus de x . D'après le corollaire 6.10, il suffit de vérifier que $f_{Y'} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est plat en x' . Le corollaire 6.5 assure que, quitte à rétrécir X , on peut supposer f fini. On peut donc conclure par [LP20, Proposition 5.6.5].

iii) D'après le corollaire 6.14 et le lemme 2.9, le graphe $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_Z Y$ est étale en x . Or, d'après ii), $p_Y : X \times_Z Y \rightarrow Y$ est étale en tout point au-dessus de x . Donc $f = p_Y \circ \Gamma_f$ est étale en x par i).

iv) C'est une conséquence de [Stacks, Tag 00U7]

□

Proposition 7.3. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces S -analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x . On suppose que $X \rightarrow S$ est plat en x . Si $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ est étale en x alors $f : X \rightarrow Y$ est étale en x .*

Démonstration. D'après le corollaire 4.5, f est plat en x et il reste à montrer que ce morphisme est non ramifié en x . Comme f_s est non ramifié en x et $f_s^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, on conclut par la proposition 6.4. □

Lemme 7.4. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est non ramifié en x . On dispose alors de voisinages ouverts $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s avec $f(U) \subset V$ et d'un polynôme unitaire $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ de sorte que, en notant $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_V^1}/(P(T)))$, $f : U \rightarrow V$ se factorise par la projection naturelle $p : Y \rightarrow V$:*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & V \end{array}$$

et on a :

- $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$
- $Y_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$
- $p : Y \rightarrow V$ est étale en $\tilde{f}(x)$
- $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ est une immersion

De plus, si on suppose que f est étale en x alors $\tilde{f}$ est un isomorphisme local en x .

Démonstration. On commence par noter que, d'après le corollaire 6.6, $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_s$ -module de type fini. D'après le théorème de l'élément primitif, on dispose de $\bar{u} \in \kappa(x)$ non nul vérifiant $\kappa(x) \cong \kappa(s)[\bar{u}]$. On note $u \in \mathcal{O}_x$ un relevé de $\bar{u}$, $\bar{P} \in \kappa(s)[T]$ le polynôme minimal de $\bar{u}$ et $d = \deg(\bar{P})$. La famille d'éléments $1, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{d-1}$ est génératrice de $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x \cong \kappa(x)$ sur $\mathcal{O}_s$ et, d'après le lemme de Nakayama, $\mathcal{O}_x$ est engendré sur $\mathcal{O}_s$ par $1, u, \dots, u^{d-1}$. On dispose donc de $P \in \mathcal{O}_s[T]$ unitaire de degré d vérifiant $P(u) = 0$ dans $\mathcal{O}_x$ et l'image de P dans $\kappa(s)[T]$ s'identifie à $\bar{P}$. On a donc bien $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$. Soient $V \subset S$ un voisinage ouvert de s tel que les coefficients de P soient définis sur $\mathcal{O}(V)$ et $U = f^{-1}(V)$. D'après le corollaire 6.5, f est fini en x et donc, quitte à restreindre U , on peut supposer que $U_s = \{x\}$. D'après [LP20, Lemme 5.1.3] et quitte à rétrécir une nouvelle fois U et V , on peut donc supposer $u \in \mathcal{O}(U)$ et $P(u) = 0$ dans $\mathcal{O}(U)$. D'après la proposition 2.11, on dispose d'un unique morphisme $\tilde{g} : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^1$ vérifiant $\tilde{g}^\#(T) = u$. On note $p_{\mathbb{A}_V^1} : \mathbb{A}_V^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^1$ et $p_V : \mathbb{A}_V^1 \rightarrow V$ les

projections naturelles. On considère $g : U \rightarrow \mathbb{A}_V^1$ l'unique morphisme vérifiant $p_{\mathbb{A}^1} \circ g = \tilde{g}$ et $p_V \circ g = f$, comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^1 \\
 \searrow g & & \downarrow \\
 & \mathbb{A}_V^1 & \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^1 \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 V & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{A})
 \end{array}$$

On pose maintenant $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_V^1}/(P(T)))$. On a $g^\sharp(P(T)) = P(u) = 0$ et on déduit donc de la proposition 1.12 que $g : U \rightarrow \mathbb{A}_V^1$ se factorise de façon unique par l'immersion fermée $Y \hookrightarrow \mathbb{A}_V^1$. Le morphisme $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ obtenu est celui recherché.

On note $y = \tilde{f}(x)$. D'après la proposition 1.13, $\kappa(s)$ est hensélien et on déduit donc de [Ber93, Proposition 2.4.1] que

$$\mathcal{H}(x) \cong \kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \mathcal{H}(s) \cong \mathcal{H}(s)[T] / (P(T)).$$

On en conclut que $Y_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ et donc, d'après la proposition 6.4, $p : Y \rightarrow V$ est non ramifié en y . Ce morphisme étant plat car $P(T)$ est unitaire, on en déduit qu'il est étale en y .

On montre à présent que, quitte à restreindre U , $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ est une immersion. D'après le lemme 2.10, il suffit de montrer que $\tilde{f}_x^\sharp : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est surjectif. Comme Y_s est réduit à un point, on déduit de la proposition 2.18 que $\mathcal{O}_y \cong \mathcal{O}_s[T]/(P(T))$. On pose $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_s[u]$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}_x$ par l'injection $\mathcal{O}_s[u] \hookrightarrow \mathcal{O}_x$. L'inclusion $\mathcal{O}_s[u]/\mathfrak{m} \hookrightarrow \kappa(x)$ définissant $\kappa(x)$ comme un $\mathcal{O}_s[u]/\mathfrak{m}$ -module de type fini, on déduit de [Bos13, Remarque 3.1.2] que $\mathcal{O}_s[u]/\mathfrak{m}$ est un corps et $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_s[u]$ est donc un idéal maximal. Alors l'image réciproque de $\mathfrak{m}$ par la surjection $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_s[u]$ est $\mathfrak{m}_y$ et $\mathcal{O}_y \rightarrow (\mathcal{O}_s[u])_{\mathfrak{m}}$ est donc encore surjectif. Or, d'après [Fu11, Lemme 2.3.4], $\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_s[u])_{\mathfrak{m}}$ et on en déduit que $\tilde{f}_x^\sharp : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est surjectif et que, quitte à restreindre U , $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ est une immersion.

On suppose à présent que $f : U \rightarrow V$ est étale en x . Comme $p : Y \rightarrow V$ est non ramifié en y et $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ est une immersion, on déduit de la proposition 7.2 iii) et du lemme 2.9 que $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ est un isomorphisme local en x . Ceci conclut la démonstration. $\square$

Remarque 7.5. *Le lemme 7.4 ne peut être écrit mutatis mutandis dans le cadre schématique qu'au prix du fait que la fibre Y_s est réduite à un point. Ce résultat a effectivement des conséquences pouvant étonner le lecteur accoutumé à la théorie des schémas (voir notamment le corollaire 7.7). On peut considérer l'exemple suivant : soient*

$\mathcal{S} = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{X} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[i])$, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ le morphisme structural, $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$ le point extrême de la branche $(1 + 2i)$ -adique, $s = f^{\text{an}}(x)$, $\xi = \rho(x)$ et $\sigma = f(\xi)$. Le polynôme $Q(T) = T^2 + 1$ est irréductible dans $\mathcal{O}_\sigma[T] \cong \mathbb{Z}_{(5)}[T]$ et tout voisinage de ξ se plonge bien dans $\mathcal{X} \cong V(Q(T)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{1, \text{sch}}$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_\sigma$ contient deux points distincts. Par contre, $Q(T)$ est scindé dans $\mathcal{O}_s[T] \cong \mathbb{Z}_5[T]$ et, en choisissant un de ses facteurs irréductibles $P(T)$, on dispose d'un voisinage de x qui se plonge dans $\mathcal{S}^{\text{an}} \cong V(P(T)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$.

Corollaire 7.6. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors f est non ramifié si et seulement s'il se factorise en $X \hookrightarrow Y \rightarrow S$ où $X \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée et $Y \rightarrow S$ est un morphisme étale.*

Démonstration. On suppose que $f : X \rightarrow S$ est non ramifié. Alors, d'après le lemme 7.4 et quitte à restreindre X et S , on dispose d'un morphisme étale $p : Y \rightarrow S$ et d'une immersion $\tilde{f} : X \hookrightarrow Y$ tels que $f = p \circ \tilde{f}$. Quitte à restreindre Y , on peut supposer que $\tilde{f}$ est une immersion fermée. La réciproque découle de la proposition 6.3. $\square$

Corollaire 7.7. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors f est étale en x si et seulement si on dispose d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ dont l'image dans $\kappa(s)[T]$ est irréductible et séparable et tel que f induise un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_s[T] / (P(T)) \cong \mathcal{O}_x.$$

Démonstration. On suppose tout d'abord que $f : X \rightarrow S$ est étale en x . D'après le lemme 7.4 et quitte à restreindre X et S , on dispose d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}(S)[T]$ vérifiant $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$ et d'un isomorphisme local $X \rightarrow Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^1}/(P(T)))$ en x . En particulier, $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y$ où y désigne l'image de x dans Y . D'après ce même lemme, Y_s est réduit à un point et on déduit donc de la proposition 2.18 que $\mathcal{O}_y \cong \mathcal{O}_s[T]/(P(T))$. L'image de $P(T)$ dans $\kappa(s)[T]$ est bien irréductible et séparable car f est non ramifié en x et $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$.

Réciproquement, on suppose l'existence d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ dont l'image dans $\kappa(s)[T]$ est irréductible et séparable de sorte que $f : X \rightarrow S$ induise un isomorphisme $\mathcal{O}_s[T] / (P(T)) \cong \mathcal{O}_x$. Alors f est plat en x car $P(T)$ est unitaire. On montre que f est non ramifié en x . On a :

$$\kappa(s)[T] / (P(T)) \cong \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x.$$

L'image de $P(T)$ dans $\kappa(s)[T]$ étant irréductible, on en déduit que $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$ est un corps et donc que $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$. De plus, ce polynôme

étant séparable, on en conclut que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ et $f : X \rightarrow S$ est non ramifié en x et donc étale en x . $\square$

Corollaire 7.8. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques. Alors l'ensemble $\{x \in X \mid f \text{ est étale en } x\}$ est ouvert dans X .*

Démonstration. Soit $x \in X$. On suppose que f est étale en x . D'après le corollaire 6.13, il suffit de montrer l'existence d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que le morphisme $U \rightarrow S$ soit plat. D'après le lemme 7.4 et quitte à restreindre X et S , on dispose d'un espace $\mathcal{A}$ -analytique Y plat sur S et localement isomorphe à X au voisinage de x . Il convient alors de prendre U isomorphe à un ouvert de Y . $\square$

Corollaire 7.9. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $x \in X$. Si f est étale en x alors f est ouvert en x .*

Démonstration. On note $s = f(x)$. D'après le lemme 7.4, on peut supposer $X \cong \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^1}/(P(T)))$ où $P(T) \in \mathcal{O}(S)[T]$ est unitaire et X_s est réduit à un point. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert de x . Alors U est un voisinage de X_s et, d'après [LP20, Lemme 5.1.3], on dispose d'un voisinage ouvert $V \subset S$ de s vérifiant $f^{-1}(V) \subset U$. On sait que l'image de $P(T)$ dans $\mathcal{H}(s)[T]$ est de degré strictement positif car $x \in \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^1}/(P(T)))$. Or, $P(T)$ est unitaire et, en particulier, son coefficient dominant ne s'annule en aucun point. On en déduit que, pour tout $t \in S$, l'image de $P(T)$ dans $\mathcal{H}(t)[T]$ est de degré strictement positif et donc le morphisme $f^{-1}(V) \rightarrow V$ induit par f est surjectif. Alors $V \subset f(f^{-1}(V)) \subset f(U)$ et on en conclut que f est ouvert en x . $\square$

Proposition 7.10. *Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie et $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Si f est étale en $\rho(x)$ alors f^{an} est étale en x .*

On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Alors f est étale en $\rho(x)$ si et seulement si f^{an} est étale en x .

Démonstration. On suppose tout d'abord que f est étale en $\rho(x)$. D'après le corollaire 6.8, f^{an} est non ramifié en x et il suffit de montrer qu'il est plat en x . Quitte à restreindre $\mathcal{S}$ et d'après [Fu11, Théorème 2.3.5], on dispose d'un polynôme $P(T) \in \mathcal{O}(\mathcal{S})[T]$ de sorte que f se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{Y} = \text{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{S}}^1}/P(T)\right) \\ & \searrow f & \downarrow \pi_{\mathcal{S}} \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

où $\tilde{f}$ est un isomorphisme local en $\rho(x)$. Alors $\mathcal{Y}$ est localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$ et $f^{\text{an}} = \tilde{f}^{\text{an}} \circ (\pi_{\mathcal{Y}})^{\text{an}}$. Or, $\tilde{f}^{\text{an}}$ est un isomorphisme local en x d'après [LP20, Proposition 6.5.3] et $(\pi_{\mathcal{Y}})^{\text{an}}$ est plat en $\tilde{f}^{\text{an}}(x)$ car $P(T)$ est unitaire. On en conclut que f^{an} est plat en x et donc étale en x .

La seconde partie de l'énoncé découle des corollaires 2.25 et 6.8. $\square$

Proposition 7.11. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique et $S_0 \hookrightarrow S$ un fermé analytique ayant le même espace topologique sous-jacent que S . Le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ définit une équivalence entre la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques étales sur S et la catégorie des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques étales sur S_0 .*

Démonstration. Ce foncteur est bien défini d'après la proposition 7.2 i). On commence par montrer qu'il est pleinement fidèle. Soient X et Y des espaces $\mathcal{A}$ -analytiques étales sur S . On souhaite montrer que l'application naturelle $\text{Hom}_S(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{S_0}(X \times_S S_0, Y \times_S S_0)$ est une bijection. On note $X_0 = X \times_S S_0$ et $Y_0 = Y \times_S S_0$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_S(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_X(X, X \times_S Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{S_0}(X_0, Y_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{X_0}(X_0, X_0 \times_{S_0} Y_0) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont définies par $f \mapsto \Gamma_f$ et ont pour réciproque la composition à gauche par la projection sur Y (resp. Y_0). Il suffit donc de montrer que la flèche de droite, correspondant au changement de base $X_0 \rightarrow X$, est bijective. On note que, d'après le corollaire 6.14, tout élément de $\text{Hom}_X(X, X \times_S Y)$ est une immersion ouverte.

On renomme à présent X en S , $X \times_S Y$ en X , X_0 en S_0 et $X_0 \times_{S_0} Y_0$ en X_0 et on note $f : X \rightarrow S$ la projection sur S et $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ la projection sur S_0 . Soit $\sigma \in \text{Hom}_S(S, X)$. Comme σ est une immersion ouverte, son image $X' \subset X$ est un ouvert pour lequel $\sigma : S \rightarrow X'$ est un isomorphisme de réciproque $f|_{X'}$. Réciproquement, si on choisit un ouvert X' de X sur lequel f induit un isomorphisme, la réciproque de $f|_{X'}$ induit bien une section de f qui est une immersion ouverte d'après le corollaire 6.16. On en déduit que $\text{Hom}_S(S, X)$ est en bijection avec l'ensemble des ouverts de X sur lesquels f induit un isomorphisme. De la même façon, $\text{Hom}_{S_0}(S_0, X_0)$ est en bijection avec l'ensemble des ouverts de X_0 sur lesquels f_0 induit un isomorphisme. Comme X et X_0 ont le même espace topologique sous-jacent, les ouverts de X sont en bijection avec ceux de X_0 via le foncteur $X' \mapsto X' \times_S S_0$ et on se ramène donc à montrer que, si $X' \subset X$ est un ouvert et $X'_0 = X' \times_S S_0$, $f|_{X'}$ est un isomorphisme si et seulement si $f_0|_{X'_0}$ en est un. Soient $x_0 \in X'_0$, $s_0 = f_0(x_0)$, $x \in X'$ l'image de x_0 et $s = f(x)$. On dispose alors d'un

idéal $I \subset \mathcal{O}_s$ vérifiant $\mathcal{O}_{s_0} \cong \mathcal{O}_s/I$ et $\mathcal{O}_{x_0} \cong \mathcal{O}_x/I$. Comme f est étale et d'après le corollaire 6.6, $\mathcal{O}_x$ est de présentation finie et plat sur $\mathcal{O}_s$. On en déduit que $\mathcal{O}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_s$ d'après [Stacks, Tag 00NZ] et on note n l'entier vérifiant $\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_s)^n$. Comme $\mathcal{O}_x/I\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_s/I)^n$ est non nul, on a bien :

f est un isomorphisme en $x \Leftrightarrow n = 1 \Leftrightarrow f_0$ est un isomorphisme en x_0 .

On en conclut que le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ est bien pleinement fidèle.

On montre à présent que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soient $f : X_0 \rightarrow S_0$ un morphisme étale d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $x \in X_0$. D'après le lemme 7.4, on dispose d'un ouvert $S' \subset S$, de $S'_0 = S' \times_S S_0$, d'un voisinage ouvert $U_{0,x}$ de x et d'un polynôme unitaire $P_0 \in \mathcal{O}(S'_0)[T]$ de sorte que $U_{0,x}$ soit isomorphe à un ouvert $V_{0,x}$ de $\text{Supp} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{S'_0}^1} / (P_0(T)) \right)$. Quitte à restreindre S' , on dispose de $P(T) \in \mathcal{O}(S')[T]$ un relevé unitaire de $P_0(T)$. Alors $\text{Supp} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{S'_0}^1} / (P_0(T)) \right)$ est isomorphe à $\text{Supp} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{S'}^1} / (P(T)) \right) \times_{S'} S'_0$ qui est un fermé analytique de $\text{Supp} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{S'}^1} / (P(T)) \right)$. On note $V_{0,x}^c$ le complémentaire de $V_{0,x}$ dans $\text{Supp} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{S'_0}^1} / (P_0(T)) \right)$. Alors l'image de $V_{0,x}^c$ dans $\text{Supp} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{S'}^1} / (P(T)) \right)$ est fermée et on note V_x son complémentaire. On obtient :

$$U_{0,x} \cong V_{0,x} \cong V_x \times_{S'} S'_0 \cong V_x \times_S S_0.$$

On vérifie à présent que l'on peut recoller les V_x . Soient $x, y \in X_0$ et V_{xy} (resp. V_{yx}) l'image de $U_{0,x} \cap U_{0,y}$ dans V_x (resp. V_y). On a alors :

$$V_{xy} \times_S S_0 \cong U_{0,x} \cap U_{0,y} \cong V_{yx} \times_S S_0$$

et, le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ étant pleinement fidèle, on dispose d'un isomorphisme $\varphi_{xy} : V_{xy} \rightarrow V_{yx}$. On considère à présent un troisième point $z \in X_0$. En remarquant :

$$(U_{0,y} \cap U_{0,x}) \cap (U_{0,y} \cap U_{0,z}) \cong (U_{0,x} \cap U_{0,y}) \cap (U_{0,x} \cap U_{0,z}),$$

on déduit :

$$(V_{yx} \cap V_{yz}) \times_S S_0 \cong (V_{xy} \cap V_{xz}) \times_S S_0$$

et donc, par pleine fidélité de $X \mapsto X \times_S S_0$, on a :

$$\varphi_{xy}^{-1}(V_{yx} \cap V_{yz}) = V_{xy} \cap V_{xz}.$$

De plus, l'image du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V_{xy} \cap V_{xz} & \xrightarrow{\varphi_{xy}} & V_{yx} \cap V_{yz} \\ & \searrow \varphi_{xz} \quad \swarrow \varphi_{yz} & \\ & V_{zx} \cap V_{zy} & \end{array}$$

par le foncteur pleinement fidèle $X \mapsto X \times_S S_0$ étant commutative, ce diagramme est lui-même commutatif. D'après [Stacks, Tag 01JB], on dispose alors d'un espace localement annelé X admettant un recouvrement par des ouverts isomorphes aux $V_x, x \in X_0$. On en déduit que X est un espace $\mathcal{A}$ -analytique étale sur S et $X_0 \cong X \times_S S_0$. On en conclut que le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ est bien essentiellement surjectif. $\square$

8. MORPHISMES LISSES

L'objectif de cette section est d'introduire la notion de morphisme lisse d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et de déduire certaines de ses propriétés des résultats des sections précédentes.

Lemme 8.1. *Soient S un espace $\mathcal{A}$ -analytique, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ un morphisme d'espaces S -analytiques, $s \in S$ et $x \in X$ un point rigide épais au-dessus de s . Si f est étale en x alors $n = \dim(\mathcal{O}_x) - \dim(\mathcal{O}_s)$.*

Démonstration. On pose $y = f(x)$. Alors y est rigide épais au-dessus de s et on déduit de [Poi13, Théorème 9.17] que $\dim(\mathcal{O}_y) = n + \dim(\mathcal{O}_s)$. Comme $f_x^\# : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est étale, on a $\dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) = n + \dim(\mathcal{O}_s)$ et on en déduit le résultat. $\square$

Définition 8.2. *Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $f : X \rightarrow S$ est lisse en $x \in X$ si on dispose de $n \in \mathbb{N}$ et d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x de sorte que $f|_U$ se factorise en :*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{A}_S^n \\ & \searrow f & \downarrow \pi_S \\ & & S \end{array}$$

où $\tilde{f}$ est étale en x . L'entier n vérifiant cette propriété est noté $\dim_x f$ et appelé dimension relative de f en x .

Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques $f : X \rightarrow S$ est lisse s'il l'est en tout point de X .

Remarque 8.3. *Dans le cadre de la définition 8.2, $\dim_x f$ est unique. En effet, la propriété universelle du produit fibré implique l'existence d'un $\mathcal{H}(x)$ -point $\tilde{x}$ dans $U \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$. Alors $\tilde{x}$ est rigide épais relativement au morphisme étale $\tilde{f} \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) : U \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{H}(x)}^n$ et on déduit du lemme 8.1 :*

$$\dim_x f = \dim(\mathcal{O}_{\tilde{x}}) - \dim(\mathcal{H}(x)) = \dim(\mathcal{O}_{\tilde{x}}).$$

Proposition 8.4. *Soient $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ et $h : Y' \rightarrow Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors :*

- i) *Si f est lisse en x et g est lisse en y alors $g \circ f$ est lisse en x et $\dim_x(g \circ f) = \dim_y g + \dim_x f$.*
- ii) *Si f est lisse en x alors $f_{Y'} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est lisse de dimension relative $\dim_x f$ en tout point au-dessus de x .*

- iii) Si $g \circ f$ est lisse en x et g est non ramifié en y alors f est lisse en x et $\dim_x f = \dim_x(g \circ f)$.

Démonstration. i) On dispose d'un voisinage $U \subset X$ de x (resp. $V \subset Y$ de y), d'un entier n (resp. m) et d'un morphisme $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{A}_Y^n$ (resp. $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{A}_Z^m$) au-dessus de f (resp. g) étale en x (resp. y). D'après la proposition 7.2 ii), $\mathbb{A}_g^n : \mathbb{A}_V^n \rightarrow \mathbb{A}_Z^{m+n}$ est étale en $\tilde{f}(x)$. Quitte à restreindre U , on peut supposer $U \subset \tilde{f}^{-1}(\mathbb{A}_V^n)$ et on obtient, d'après la proposition 7.2 i), que $\mathbb{A}_g^n \circ \tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{A}_Z^{m+n}$ est étale en x . On en conclut que $g \circ f = \pi_Z \circ \mathbb{A}_g^n \circ \tilde{f}$ est lisse en x .

- ii) C'est une conséquence de la proposition 7.2 ii).
 iii) D'après le corollaire 6.14, $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_Z Y$ est un isomorphisme local en x et est donc lisse en x . De plus, d'après ii), $p_Y : X \times_Z Y$ est lisse en $\Gamma_f(x)$. On déduit donc de i) que $f = p_Y \circ \Gamma_f$ est lisse en x .

□

Proposition 8.5. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$ -schémas localement de présentation finie et $x \in \mathcal{X}^{\text{an}}$. Si f est lisse en $\rho(x)$ alors f^{an} est lisse en x .

Démonstration. Cela découle de la proposition 7.10 et du fait que $(\mathbb{A}_{\mathcal{S}}^n)^{\text{an}} = \mathbb{A}_{\mathcal{S}^{\text{an}}}^n$. □

Lemme 8.6. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble

$$\{x \in X \mid f \text{ est lisse en } x \text{ de dimension relative } n\}$$

est ouvert dans X .

Démonstration. Soit $x \in X$ un point en lequel f est lisse de dimension relative n . On dispose d'un voisinage $U \subset X$ de x et d'un morphisme $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ étale en x et vérifiant $f = \pi_S \circ \tilde{f}$. D'après le corollaire 7.8 et quitte à restreindre U , on peut supposer que $\tilde{f}$ est étale. Alors f est lisse et $\dim_x f = n$ en tout point de U . □

Lemme 8.7. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques et $x \in X$. Si f est lisse en x alors f est plat en x .

Démonstration. Quitte à restreindre X , on dispose de $n \in \mathbb{N}$ et d'un morphisme $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ étale en x vérifiant $f = \pi_S \circ \tilde{f}$. Alors $\tilde{f}$ est plat en x et π_S est plat en $\tilde{f}(x)$ d'après le corollaire 4.9. On en conclut que f est plat en x . □

Corollaire 8.8. Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$ -analytiques est étale en un point si et seulement s'il est lisse et non ramifié en ce point.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. La réciproque découle du fait que les morphismes lisses sont plats, qui est une conséquence du lemme 8.7. $\square$

RÉFÉRENCES

- [Ber90] Vladimir G. BERKOVICH. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. BERKOVICH. “Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces”. In : *Publications mathématiques de l’IHÉS* 78 (1993).
- [Bos13] S. BOSCH. *Algebraic geometry and commutative algebra*. Universitext. Springer, 2013.
- [Duc07] Antoine DUCROS. “Variation de la dimension relative en géométrie analytique p -adique”. In : *Compositio Mathematica* 143 (2007).
- [Fu11] Lei FU. *Étale cohomology theory*. Nankai tracts in mathematics v. 13. World Scientific, 2011.
- [GR84] Hans GRAUERT et Reinhold REMMERT. *Coherent Analytic Sheaves*. T. 265. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1984.
- [Hub93] R. HUBER. “Continuous valuations”. In : *Mathematische Zeitschrift* 212 (1993).
- [Hub94] R. HUBER. “A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties.” In : *Mathematische Zeitschrift* 217 (1994).
- [LP20] Thibaud LEMANISSIER et Jérôme POINEAU. *Espaces de Berkovich sur Z : catégorie, topologie, cohomologie*. 2020.
- [LS19] Thibaud LEMANISSIER et Matthew STEVENSON. *Topology of Hybrid Analytifications*. 2019.
- [Poi10] Jerome POINEAU. *La droite de Berkovich sur Z* . 2010.
- [Poi13] Jérôme POINEAU. “Espaces de Berkovich sur Z : étude locale”. In : *Inventiones mathematicae* 194 (2013).
- [Ray74] Michel RAYNAUD. “Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl...” In : *Mémoires de la Société mathématique de France* 1 (1974).
- [SGA1] Alexander GROTHENDIECK. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1) : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61*. EDP Sciences, 2003.
- [Stacks] Stacks Project AUTHORS. *Stacks Project*. 2021. URL : <https://stacks.math.columbia.edu>.
- [Tat71] John TATE. “Rigid analytic spaces”. In : *Inventiones Mathematicae* 12 (1971).
- [Wei95] André WEIL. *Basic number theory*. 1995.